PRIX 14

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

139

EXPOSÉS MATHÉMATIQUES

publiés à la mémoire de

JACQUES HERBRAND

III

ÉTUDE DES FONCTIONS SOUSHARMONIQUES AU VOISINAGE D'UN POINT

PAR

MARCEL BRELOT

PARIS

HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS

6, rue de la Sorbonne, 6

1934

Actualités Scientifiques et Industrielles

Série 1929 :

I. L. de Broglie. — **La crise récente de l'optique ondulatoire.**
II. G. Foex. — **Les substances mésomorphes, leurs propriétés magnétiques.**
III. Bloch Eugène. — **Les atomes de lumière et les quanta.**
IV. L. Dunoyer. — **La cellule photo-électrique et ses applications.**
V. G. Ribaud. — **Le rayonnement des corps incandescents.**
VI. Lt-Colonel Jullien. — **Applications du courant électrique à la réalisation d'instruments de musique.**
VII. Bloch Léon. — **Structure des spectres et structure des atomes.**
VIII. V. Kammerer. — **Les hautes pressions de vapeur.**
IX. R. Mesny. — **Les ondes dirigées et leurs applications.**
Conférences réunies en un volume .... 35 fr.

Série 1930 :

X. G. Ribaud. — **Température des flammes** .... 5 fr.
XI. J. Cabannes. — **Anisotropie des molécules. Effet Raman** .... 8 fr.
XII. P. Fleury. — **Couleurs et colorimétrie** .... 5 fr.
XIII. G. Gutton. — **Les ondes électriques de très courtes longueurs et leurs applications** .... 4 fr.
XIV. P. David. — **L'électro-acoustique** .... 5 fr.
XV. L. Brillouin. — **Les statistiques quantiques** .... 5 fr.
XVI. F. Baldet. — **La constitution des comètes** .... 5 fr.
XVII. G. Darmois. — **La structure et les mouvements de l'univers stellaire.** 3 fr.

Série 1931 :

XIX. A. Pérard. — **La haute précision des mesures de longueur** .... 5 fr.
XX. P. Auger. — **L'effet photo-électrique des rayons X dans les gaz** .... 5 fr.
XXII. A. Perrin. — **Fluorescence, durée élémentaire d'émission lumineuse** .... 5 fr.
XXIII. M. de Broglie. — **Désintégration artificielle des éléments par bombardement des rayons alpha** .... 5 fr.
XXV. J.-J. Trillat. — **Les applications des rayons X à l'étude des composés organiques** .... 5 fr.
XXVI. J.-J. Trillat. — **L'état liquide et les états mésomorphes** .... 5 fr.
XXVII. Ph. Le Corbeiller. — **Les systèmes auto-entretenus et les oscillations de relaxation** .... 8 fr.
XXVIII. F. Bedeau. — **Le quartz piézo-électrique. ses applications à la T. S. F.** .... 5 fr.
XXIX. E. Darmois. — **L'hydrogène est un mélange : Ortho et parahydrogène** .... 5 fr.
XXX. R. Audubert. — **Les piles sensibles à l'action de la lumière** .... 8 fr.

Série 1932 :

(Voir troisième page de la couverture.)

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

139

EXPOSÉS MATHÉMATIQUES

publiés à la mémoire de

JACQUES HERBRAND

III

ÉTUDE DES FONCTIONS SOUSHARMONIQUES AU VOISINAGE D'UN POINT

PAR

MARCEL BRELOT

PARIS

HERMANN & C^ie, ÉDITEURS

6, rue de la Sorbonne, 6

1934

INTRODUCTION

PARMI les fonctions de variables réelles, *les fonctions sousharmoniques*, comme l'a bien souligné F. Riesz, se sont révélées un instrument commode dans diverses questions d'analyse (1); d'autre part, on en connaît des exemples importants, comme le potentiel ordinaire de masses négatives distribuées sur des aires dans le plan ou en volume dans l'espace, les fonctions à laplacien continu $\geqslant 0$, les modules des fonctions analytiques de z complexe, etc.

Il était donc naturel de les étudier pour elles-mêmes en général; moyennant une définition très étendue que nous adopterons, qui ne suppose ni la continuité, ni même que la fonction soit partout finie (mais qui d'ailleurs n'alourdira pas l'exposé essentiel de ce mémoire), F. Riesz (2) a montré comment elles coïncidaient à peu près complètement avec les potentiels les plus généraux de masses négatives exprimés par des intégrales de Stieljes et il a proposé d'utiliser cette représentation pour une étude infinitésimale des fonctions sousharmoniques ainsi généralisées.

Ce travail de F. Riesz a comme point de départ la proposition suivante extrêmement simple, qui lui a été suggérée par le théorème bien connu de Hardy sur les moyennes des fonctions analytiques et dont ce théorème devient alors une application

---

(1) Voir une conférence de F. Riesz, *Acta Szeged*, 2 (1925); et Montel, *Journal de math.* (1928). M. F. Riesz dit en français « fonctions subharmoniques »; nous préférons la dénomination de « sousharmoniques » employée par M. Montel.
(2) Voir *Acta Math.*, 48 et 54.

INTRODUCTION

Parmi les fonctions de variables réelles, *les fonctions sousharmoniques*, comme l'a bien souligné F. Riesz, se sont révélées un instrument commode dans diverses questions d'analyse (1); d'autre part, on en connaît des exemples importants, comme le potentiel ordinaire de masses négatives distribuées sur des aires dans le plan ou en volume dans l'espace, les fonctions à laplacien continu $\geqslant 0$, les modules des fonctions analytiques de z complexe, etc.

Il était donc naturel de les étudier pour elles-mêmes en général; moyennant une définition très étendue que nous adopterons, qui ne suppose ni la continuité, ni même que la fonction soit partout finie (mais qui d'ailleurs n'alourdira pas l'exposé essentiel de ce mémoire), F. Riesz (2) a montré comment elles coïncidaient à peu près complètement avec les potentiels les plus généraux de masses négatives exprimés par des intégrales de Stieljes et il a proposé d'utiliser cette représentation pour une étude infinitésimale des fonctions sousharmoniques ainsi généralisées.

Ce travail de F. Riesz a comme point de départ la proposition suivante extrêmement simple, qui lui a été suggérée par le théorème bien connu de Hardy sur les moyennes des fonctions analytiques et dont ce théorème devient alors une application

---

(1) Voir une conférence de F. Riesz, *Acta Szeged*, 2 (1925); et Montel, *Journal de math.* (1928). M. F. Riesz dit en français « fonctions subharmoniques »; nous préférons la dénomination de « sousharmoniques » employée par M. Montel.

(2) Voir *Acta Math.*, 48 et 54.

facile. C'est que, par exemple dans le plan, la moyenne d'une fonction sousharmonique u sur une circonférence de centre fixe O et rayon r, qui balaie une couronne où u est sousharmonique, est une *fonction convexe* de $\log \frac{1}{r}$.

Or, dans le cas où O appartient au domaine de sousharmonicité ou bien en est un point frontière isolé, c'est-à-dire *dans le cas étudié dans le présent mémoire, où u est sousharmonique au voisinage de* O, *ce point exclu*, j'ai remarqué que l'interprétation géométrique de ce théorème de convexité permettait, grâce aux propriétés élémentaires des branches infinies des courbes convexes, d'obtenir immédiatement toute une série de propriétés très simples de l'allure de u en O. C'est cela qui est la base de l'étude de ce mémoire (1); je n'y utilise pas la représentation potentielle de F. Riesz, mais seulement son point de départ et certaines notions que l'auteur a introduites auxiliairement pour généraliser des notions élémentaires relatives aux cas où l'on dispose de la continuité ou des dérivées.

D'ailleurs *les propriétés obtenues* ne sont pas complètement nouvelles; je les avais établies pour la plupart dans le cas particulier (2) du potentiel ordinaire de masses finies réparties avec une densité $\leqslant 0$ continue au voisinage d'un point, ce point exclu, et aussi, grâce en partie à ces derniers résultats, dans le cas particulier (3) des intégrales $\geqslant 0$ de l'équation $\Delta u = c(\mathrm{M})u$ au voisinage d'un point singulier O du coefficient c supposé $\geqslant 0$ et continu hors de O. Il m'a paru intéressant de *les déduire systématiquement, dans le cas le plus général, du théorème de convexité*, en s'aidant naturellement des propriétés connues des singularités ponctuelles des fonctions harmoniques; les nouveaux résultats constitueront une généralisation de ces dernières.

La présente étude, comme celle de F. Riesz, s'applique dans l'espace à $n \geqslant 2$ dimensions; je me placerai pour le

(1) Cette étude a déjà été l'objet de 3 notes aux *C. R. Ac. Sc.* (1932, t. 195, p. 693, 852 et 932) qui contiennent la plus grande partie des résultats de ce mémoire.

(2) Voir thèse (Paris, 1931) (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, 1931), chap. II, § III, nos 9-10.

(3) Voir thèse, *loc. cit.*

langage dans le cas du plan; la transposition serait d'ailleurs immédiate pour l'espace, en remplaçant en particulier $\log \frac{1}{r}$ par $\frac{1}{r}$ pour 3 dimensions ou $\frac{1}{r^{n-2}}$ pour $n > 2$ dimensions, et je me contenterai de signaler brièvement les quelques points où il y a une légère différence.

Dans le chapitre premier je rappellerai, en les complétant, des notions indispensables : on y trouvera un rapide exposé de la théorie des fonctions convexes (d'une variable), les bases de la théorie des fonctions sousharmoniques et les propriétés fondamentales des fonctions harmoniques au voisinage d'un point.

Le chapitre II traitera le sujet même du mémoire; on donnera d'abord des *propriétés générales de moyennes et de flux*, puis on s'attachera plus particulièrement au cas où u est bornée supérieurement parce que ce cas est identique à celui où u est sousharmonique même en O. On cherchera ensuite dans le cas général s'il y a des *majorantes harmoniques* au voisinage de O et on les étudiera; cela montrera en particulier comment des limitations *en moyenne* sur u entraînent des limitations *vraies* et permettra un classement des circonstances précisant les questions qui resteraient à étudier. On montrera enfin l'intérêt et la nécessité de notions de moyennes (et de quasi-limite) par des *exemples* où *u continue* hors de O (et même possédant des dérivées continues jusqu'à un ordre arbitraire) présente en O des allures très irrégulières, et cela marquera une différence importante vis-à-vis des fonctions convexes, avec lesquelles les fonctions sousharmoniques ont par ailleurs bien des analogies et des relations. Dans tout cela quelques pages sont réservées au cas où u admet un laplacien continu et des extensions sont faites, dans le cas général, au voisinage, non plus d'un point, mais d'un ensemble fermé de capacité nulle; de même que pour les fonctions harmoniques bornées, un tel ensemble ne peut présenter de singularités pour les fonctions sousharmoniques bornées supérieurement, prises dans leur sens le plus général.

Au chapitre III, je présenterai *quelques applications*, d'abord aux fonctions harmoniques et au problème de Dirichlet; puis je reprendrai rapidement d'après la théorie précédente, avec

des compléments, mes études antérieures des équations $\Delta u = f$, $\Delta u = cu$ ($c \geqslant 0$), au voisinage d'un point singulier de f ou de c. Et cela montrera, sur ces cas simples, le parti qu'on peut tirer de la théorie générale des fonctions sousharmoniques dans l'étude des singularités des intégrales d'équations aux dérivées partielles ou même de fonctions de types très généraux qui peuvent se ramener à des fonctions sousharmoniques.

Pour terminer, rappelons que les fonctions sousharmoniques ont été déjà utilisées avec succès dans la théorie des fonctions de variable complexe; on peut donc espérer que le présent mémoire permettra dans ce même domaine des applications nouvelles, apportant tout au moins des améliorations d'exposé.

CHAPITRE PREMIER

PRELIMINAIRES

§ I. — *Les fonctions convexes* [1].

1. — Une fonction réelle de x réel, prenant une valeur finie en tout point de l'intervalle *ouvert* (α, β) fini ou non, y est dite *convexe*, si, dans tout intervalle complètement intérieur (x_0, x_1), elle est au plus égale à la fonction linéaire prenant les mêmes valeurs en x_0 et x_1. Plus brièvement, la fonction $f(x)$ est convexe si la courbe représentative l'est, c'est-à-dire si cette courbe est située au-dessous (au sens large) de toute corde.

De cette simple définition découlent aisément bien des propriétés des fonctions convexes. J'énoncerai un certain ensemble de telles propriétés d'ailleurs faciles ou à peu près connues, et dont quelques-unes seront essentielles pour la suite.

2. — En chaque point de (α, β) il y a une dérivée à droite et une dérivée à gauche, toutes deux finies, la première étant au moins égale à la seconde (existence de demi-tangentes). Il s'ensuit la continuité de $f(x)$.

Ces dérivés ne peuvent différer que sur un ensemble fini ou dénombrable de points. Chacune est fonction croissante de x;

---

(1) Voir surtout : Jensen, *Acta math.*, 30 (1906); F. Riesz, *Acta math.*, 48; Montel, *Journal de math.* (1928); puis : Hardy, Littlewood et Polya, *Messenger of math.*, 58; Hartogs, *Math. ann.*, 62. Comme on voit dans le texte, les fonctions convexes seront prises dans *le sens large* qui comprend les fonctions linéaires.

C'est aussi *au sens large*, sauf mention contraire, qu'on prendra les notions de *croissance ou décroissance* pour une suite ou une fonction. Ainsi $\varphi(x)$ sera dite croissante ou décroissante, si quels que soient x_1 et x_1 $(x_1 < x_2)$ de l'intervalle de définition :

$$\varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2) \quad \text{ou respectivement} \quad \varphi(x_1) \geqslant \varphi(x_2).$$

de plus, si $x_0 < x_1$, la dérivée à droite en x_0 est au plus égale à la dérivée à gauche en x_1 et la pente de la corde (x_0, x_1) est comprise (au sens large) entre ces deux dérivées.

Toute droite tangente (c'est-à-dire supportant une demi-tangente) est au-dessous de la courbe (au sens large). Si elle a avec la courbe un autre point commun que le point de contact considéré, elle a en commun avec elle le segment joignant ces deux points.

Une droite non tangente ne peut rencontrer la courbe qu'en deux points au plus; toute corde est, hors du segment intercepté, au-dessous (au sens large) de la courbe.

3. — Aux extrémités de l'intervalle (α, β), $f(x)$ a des limites déterminées f_α, f_β finies ou non.

Cas de β fini. — f_β est fini ou égal à $+\infty$; s'il est fini, il y a une demi-tangente au point (β, f_β); elle peut avoir une pente infinie; à part cela, les cordes issues de ce point et cette demi-tangente jouissent des propriétés énoncées plus haut pour les éléments analogues relatifs à un point intérieur à (α, β).

Cas de $\beta = +\infty$. — Il y a une direction asymptotique dont la pente est la limite commune p de celle des cordes M_0M et de OM; p est finie ou égale à $+\infty$. Il y a aussi une asymptote qui peut être rejetée à l'infini. Les propriétés des sécantes et de la demi-tangente relatives à l'extrémité (β, f_β) du cas « β fini » s'étendent au cas actuel du point à l'infini sur la branche de courbe. Par exemple, si $p \leqslant 0$, l'inégalité $x_1 < x_2$ entraînera :

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + p(x_2 - x_1) \leqslant f(x_1),$$

en sorte que f sera décroissante et que $f_\beta \neq +\infty$; donc si $f_\beta = +\infty$, $p > 0$.

Les dérivées à droite et à gauche tendent (en croissant) vers p quand $x \to +\infty$; les ordonnées à l'origine des demi-tangentes tendent (en décroissant) vers celle de l'asymptote.

Quant à la rotation de OM, disons seulement que, pour x assez grand, la pente de OM est soit croissante, soit décroissante.

Résultats analogues pour l'extrémité α. D'ailleurs, on passe d'un cas à l'autre en changeant x en $-x$, ce qui n'altère pas la propriété de convexité.

4. — $f(x)$ ne peut admettre un maximum en un point de (α, β) (ouvert) que si $f =$ const; la borne supérieure n'est donc atteinte que dans ce cas.

La borne inférieure peut être atteinte ou non; si elle est égale à $f(\alpha)$ ou $f(\beta)$, la fonction est respectivement croissante ou décroissante dans (α, β); si elle est moindre que f_α et f_β, la fonction décroît jusqu'à atteindre son minimum, puis est croissante dans l'intervalle restant.

Supposons $\beta = +\infty$; si $f_\beta = +\infty$, $f(x)$ est croissante au voisinage de $+\infty$; sinon elle est décroissante dans tout l'intervalle $(\alpha, +\infty)$.

5. — Une condition nécessaire et suffisante de convexité est qu'en tout point de (α, β)

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$$

pour toute valeur arbitrairement petite de h.

D'après cela, la convexité en chaque point d'un intervalle, c'est-à-dire au voisinage de ce point, entraîne la convexité dans tout l'intervalle (ouvert).

S'il existe une dérivée seconde directe :

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

donc, en particulier, s'il existe une dérivée seconde ordinaire, un critère de convexité (nécessaire et suffisant) est qu'elle soit partout $\geqslant 0$ (1).

Un critère général (nécessaire et suffisant) est que $f(x)$ soit continue et possède une dérivée à droite (ou à gauche), avec l'une ou l'autre des conditions supplémentaires suivantes : cette dérivée doit être croissante (d'où, lorsque f'' existe, le critère $f''(x) \geqslant 0$) ou bien (autre énoncé équivalent) la demi-tangente correspondante doit être au-dessous de la courbe (au sens large).

6. — Une combinaison linéaire à coefficients > 0 de fonctions convexes est une fonction convexe; de même l'enveloppe supé-

---

(1) La condition est évidemment nécessaire. Si elle est réalisée, la fonction $\varphi = f(x) - l(x) + t^2(x-a)(x-b)$, où $l(x)$ est linéaire et coïncide avec f pour $x = a$ et $x = b$, admet une dérivée seconde directe > 0. Donc pas de maximum, d'où $\varphi < 0$ dans (a, b), et comme t est arbitraire, $f \leqslant l(x)$.

rieure (égale en chaque point à la borne supérieure) supposée partout finie d'un ensemble quelconque de fonctions convexes.

Un suite uniformément convergente de fonctions convexes tend vers une fonction convexe. Une suite décroissante de fonctions convexes tend soit vers une fonction convexe, soit partout vers $-\infty$.

Toute ligne polygonale inscrite dans une courbe convexe est elle-même convexe. Grâce à la possibilité de raccords convenables supprimant les angles, on voit comment, dans tout l'intervalle ouvert (α, β), fini ou non, où est définie $f(x)$ convexe, on pourra approcher $f(x)$ uniformément à $\varepsilon > 0$ arbitraire près par une fonction convexe au moins égale et possédant des dérivées jusqu'à un ordre arbitrairement fixé; on pourra même faire en sorte qu'elle soit croissante ou décroissante dans tout intervalle où $f(x)$ l'est et qu'elle admette même borne supérieure dans (α, β).

Un tel procédé d'approximation (1) peut être commodément utilisé pour établir en toute généralité des théorèmes sur les fonctions convexes qui se vérifient immédiatement lorsqu'il existe des dérivées des premiers ordres (2).

§ II. — *Les fonctions sousharmoniques. — Généralités* (3).

1. — Une fonction réelle *continue* $u(\mathrm{M})$ dans un domaine Ω (4) à 2 (ou plus) dimensions, y est dite *sousharmonique*, si, dans

---

(1) Un procédé analogue consiste dans l'itération de la transformation :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$$

En prenant h assez petit et itérant n fois, on obtiendra sur l'intervalle (a, b), fini complètement intérieur, une approximation à ϵ près par une fonction convexe possédant n dérivées continues, d'ailleurs $\geqslant f$ et décroissante de h.

(2) Ex. : théorèmes de convexité sur les fonctions obtenues par certaines opérations sur des fonctions convexes (produit, fonction de fonction, etc.).

(3) Voir F. Riesz, *Acta math.*, 48 et 54. — Montel, *Journal de math.*, 1928; Académie d'Athènes, 1931. — T. Rado, *C. R. Ac. Sc.*, t. 186, p. 346.

(Antérieurement, Hartogs, *Math. Annalen*, t. 62; F. Riesz, *Acta Szeged*, 2.)

Citons encore : Franklin, sept. 1928, et Wiener, avril 1927, dans le *Mass. Inst. of Technology*.

(4) Ensemble ouvert connexe.

tout domaine ω borné du type de Dirichlet (1), complètement intérieur à Ω, elle est au plus égale à la fonction harmonique qui prend les mêmes valeurs à la frontière de ω. On a une définition équivalente, avec tout ω non nécessairement du type de Dirichlet, en comparant u à la solution généralisée au sens de Wiener (2) du problème de Dirichlet relatif à ω avec une distribution frontière égale à u.

Un critère de sousharmonicité (nécessaire et suffisant) est qu'en tout point M de Ω, u soit au plus égal, pour toute circonférence γ arbitrairement petite de centre M, à la fonction harmonique dans γ, prenant sur γ les valeurs de u, c'est-à-dire à la valeur moyenne de u sur la circonférence γ. Comme la convexité, la sousharmonicité a donc un caractère local.

Supposons que u admette un laplacien ordinaire (somme des dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$... supposées seulement existantes) ou plus généralement un *laplacien généralisé* (3) Δu. Une condition suffisante pour la sousharmonicité est que ce laplacien soit $\geqslant 0$ (4). Au moins s'il est continu, la condition est aussi nécessaire et u est alors, au voisinage de tout point, de la forme :

$$u(\mathrm{M}) = -\frac{1}{2\pi}\iint_\gamma \log\frac{1}{\mathrm{PM}}\,\varphi(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}} + \text{fct. harmonique.}$$

(γ petit cercle de centre M_0) avec $\varphi(\mathrm{P}) = \Delta u(\mathrm{P}) \geqslant 0$.

---

(1) C'est-à-dire tel que le problème de Dirichlet classique admette une solution pour toute distribution-frontière continue. On dit aussi domaine normal ou régulier.

(2) Voir sur ce sujet un article bibliographique : *Einige neuere Untersuchungen über das Dirichletsche Problem, Jahresbericht*, 1932, ou une version française améliorée dans *Mathematica*, 1933.

(3) Au sens de ma thèse (*loc. cit.*), chap. I, § I.

(4) On utilisera une idée de Zaremba à propos des fonctions harmoniques (R. di Palermo, t. 19 [1905].)

Soit γ un petit cercle de centre M_0 et h la fonction harmonique prenant les valeur de u au contour; alors :

$$v(\mathrm{M}) = u(\mathrm{M}) - h(\mathrm{M}) - t^2\iint_\gamma \mathrm{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}}$$

(G. fct. de Green) s'annule au contour et possède un laplacien généralisé > 0 à l'intérieur. Il n'y a donc pas de maximum. Donc $v(\mathrm{M}) < 0$ à l'intérieur de γ et comme t^2 est arbitraire $u(\mathrm{M}) \leqslant h(\mathrm{M})$.

D'ailleurs, si u est de cette forme au voisinage de tout point, même avec un $\varphi \geqslant 0$ seulement borné et mesurable, u sera encore continue et sousharmonique.

2. — Pour identifier autant que possible les fonctions sousharmoniques avec les potentiels de masses négatives, F. Riesz a été conduit à en *généraliser la définition*. Désormais nous dirons avec lui qu'une fonction réelle u(M) sur le domaine Ω y est *sousharmonique* si elle satisfait aux conditions suivantes :

a) en chaque point, elle a une valeur finie ou égale à $-\infty$;

b) elle est semi-continue supérieurement (c'est-à-dire coïncide avec sa borne supérieure en chaque point, donc est la limite, sur tout ensemble parfait intérieur, d'une suite décroissante de fonctions continues);

c) elle est finie sur un ensemble de points partout dense sur Ω;

d) si ω est un domaine borné complètement intérieur à Ω, et h une fonction harmonique sur ω, prenant à la frontière des valeurs en distribution continue et au moins égales à u, on a sur ω : $u \leqslant h$ (1).

Sur toute circonférence γ tracée sur le domaine, u est *sommable* (2); cela s'étend même à tout arc possédant une tangente continue satisfaisant à une condition de Hölder.

---

(1) S'il y a égalité en un point, il y a égalité partout. Cela résulte de l'impossibilité d'un maximum pour u (hors le cas $u =$ const), qui est indiquée plus loin.

(2) F. Riesz l'a démontré en supposant l'intérieur de γ contenu dans Ω. Voici une démonstration générale s'étendant aussitôt au cas d'une courbe de Jordan dont la tangente continue satisfait à une condition de Hölder, d'où la sommalité même pour un arc d'une telle courbe.

Soit une circonférence γ' assez voisine de γ, w_n une suite décroissante de fonctions continues sur la circonférence γ et tendant vers u, U_n la fonction harmonique dans la couronne (γ, γ') égale à w_n sur γ et à $K > u$ sur γ'. Soit M_0 un point de la couronne et $G(M, M_0)$ la fonction de Green :

$$U_n(M_0) = \frac{K}{2\pi}\int_{\gamma'} \frac{dG}{dn}\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} w_n \frac{dG}{dn}\, ds$$ (normale prise vers l'intérieur de la couronne).

D'où, A étant une limite supérieure des w_n et μ le minimum *positif* de $\dfrac{dG(M, M_0)}{dn}$ sur γ, et puisque $u(M_0) \leqslant U_n(M_0)$,

$$u(M_0) - \frac{K}{2\pi}\int_{\gamma'} \frac{dG}{dn}\, ds - \frac{A}{2\pi}\int_{\gamma} \frac{dG}{dn}\, ds \leqslant \frac{\mu}{2\pi}\int_{\gamma} (w_n - A)\, ds.$$

On en déduit que $u - A$ est sommable sur la circonférence γ : donc u l'est aussi.

Soit γ un cercle quelconque (aire) complètement intérieur; la valeur de u au centre est au plus égale à la valeur moyenne sur la circonférence. Il s'ensuit que si u n'est pas constante dans tout Ω, elle n'admet pas de maximum sur Ω et n'atteint pas sa borne supérieure sur Ω.

De plus, dans la définition de la sousharmonicité, on peut remplacer la condition (d) par la condition locale suivante : en tout point M_0, u est au plus égale à la valeur moyenne supposée existante sur toute circonférence arbitrairement petite de centre M_0.

3. — Une combinaison linéaire à coefficients > 0 de fonctions sousharmoniques est elle-même sousharmonique. De même l'enveloppe supérieure d'un nombre fini de fonctions sousharmoniques est sousharmonique, et la proposition est vraie pour un ensemble quelconque de fonctions sousharmoniques à condition que l'enveloppe supérieure soit semi-continue supérieurement. Comme application, si u est harmonique, $|u|$ (enveloppe supérieure de u et $-u$) est sousharmonique; si u est sousharmonique,

$$\overset{+}{u} = \frac{u + |u|}{2}$$

(enveloppe supérieure de u et 0), donc aussi $u + |u|$ sont sousharmoniques; considérons encore une fonction u sousharmonique dans une couronne circulaire de centre O, ou dans un cercle moins son centre O; la fonction égale sur chaque circonférence de centre O au maximum de u sur cette circonférence est l'enveloppe supérieure des fonctions obtenues à partir de u par rotation; on démontre aisément qu'elle est semi-continue supérieurement (on verra même plus loin qu'elle est continue); donc elle est sousharmonique.

Une suite uniformément convergente de fonctions sousharmoniques est sousharmonique. Une suite décroissante de fonctions sousharmoniques tend vers une fonction sousharmonique ou bien tend partout vers $-\infty$.

Inversement, étant donné u sousharmonique sur Ω et le domaine ω complètement intérieur, on peut former sur ω une suite décroissante de fonctions sousharmoniques tendant vers u,

chacune possédant ses dérivées continues jusqu'à un ordre p donné. Il suffit d'itérer p fois la transformation :

$$w(\mathrm{M}) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\gamma^r_{\mathrm{M}}} u(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} \qquad (\gamma^r_{\mathrm{M}} \text{ cercle de centre M et rayon } r)$$

et de faire tendre r vers zéro dans la suite $\frac{1}{n}$.

Une seule médiation suffit, lorsque u admet des dérivées premières continues, pour former une suite u_n de la nature précédente, où u_n possède un laplacien continu et tend uniformément vers u tandis que les dérivées premières de u_n tendent uniformément vers celles de u (1).

4. — A côté des analogies entre fonctions convexes et sousharmoniques, il y a aussi bien des relations (2). Signalons seulement ici les deux propositions suivantes qui seront utiles :

I. Une fonction convexe f d'une fonction harmonique u est sousharmonique;

II. Une fonction convexe croissante f d'une fonction sousharmonique u est sousharmonique.

Mettons à part le cas évident où $u = \text{const}$. Alors si α et β sont les bornes inférieure et supérieure de u sur son domaine Ω, la fonction convexe f est supposée définie sur l'intervalle ouvert (α, β) et on lui attribue aux extrémités les valeurs limites qu'elle y prend.

La démonstration est immédiate lorsque f et u possèdent des dérivées secondes continues. Des passages à la limite permettront de passer au cas général (3).

---

(1) On aurait des résultats analogues avec médiation sur des *carrés* de centre M et côté $2r$. (Voir Rado, *loc. cit.*)

(2) Voir Montel et T. Rado (*loc. cit.*) et le chapitre suivant du présent mémoire.

(3) I. u est harmonique; formons une suite de fonctions convexes f_n sur (α, β), douées de dérivées secondes continues, f_n convergeant uniformément vers f; alors $f_n(u)$ est sousharmonique et converge uniformément vers $f(u)$ qui est donc sousharmonique.

II. u est seulement sousharmonique, mais $f(x)$ croissante. On formera sur (α, β), comme précédemment, une suite f_n analogue, mais de plus formée de fonctions toutes croissantes. Soit ω un domaine borné complètement intérieur à Ω et (α', β') les bornes inférieure et supérieure de u sur ω. Puisque $u \neq \text{const}$, $\beta' < \beta$. Formons une suite u_n, décroissante et tendant vers u, de fonctions sousharmoniques sur ω et douées de dérivées secondes continues. On peut, en négligeant les termes jusqu'à un certain rang, supposer que $u_n < \beta$ (puisque

Comme application : si $u \geqslant 0$ est sousharmonique, u^α ($\alpha \geqslant 1$) l'est aussi; si u est harmonique, $|u|^\alpha$ ($\alpha \geqslant 1$) est sousharmonique (1); toute fonction convexe de $\log \frac{1}{r}$ ($r = \mathrm{OM} > 0$) est sousharmonique de M; ex. : r et $\frac{1}{r}$.

5. — Renvoyant au travail de F. Riesz pour la représentation des fonctions sousharmoniques par des potentiels, nous en extrayons les notions auxiliaires suivantes dont nous aurons besoin.

La meilleure majorante harmonique (2). — Considérons un domaine borné ω, du type de Dirichlet, complètement intérieur au domaine Ω de la fonction sousharmonique u et, sur la frontière de ω une suite décroissante de distributions continues w_n tendant vers u. Soit h_n la fonction harmonique sur ω, prenant ces valeurs frontières; $h_n \geqslant u$; sur ω, h_n tend en décroissant vers une fonction harmonique $h \geqslant u$; h est *indépendant* de la suite w_n. F. Riesz l'appelle *la meilleure majorante harmonique* de u sur ω; elle est au plus égale à toute fonction harmonique sur ω et prenant sur la frontière des valeurs en distribution continue $\geqslant u$, et au plus égale à la limite de toute suite décroissante de telles fonctions. En particulier si ω est un cercle, la meilleure majorante harmonique est l'intégrale de Poisson correspondant aux valeurs de u sur la circonférence.

Si ω n'est pas nécessairement du type de Dirichlet, ce qui précède subsisterait en considérant les fonctions harmoniques seulement attachées à la distribution-frontière au sens de Wiener.

Une fonction sousharmonique sur un domaine Ω n'admet pas toujours de *majorante harmonique* sur ce domaine, c'est-à-dire de fonction harmonique partout au moins égale. On en verra des exemples, mais s'il existe une telle majorante il en existe une inférieure ou égale à toutes, dite *plus petite majo-*

$u < \beta' < \beta$); p étant fixe, $f_p(u_n)$ est sousharmonique et décroissante; elle tend vers $f_p(u)$, qui est donc sousharmonique sur ω; quand p tend vers $+\infty$, $f_p(u)$ tend uniformément vers $f(u)$, qui est donc sousharmonique.

(1) Si u est harmonique (même complexe), $|u|$ est sousharmonique, d'où la conclusion établie autrement par F. Riesz, *Acta Szeged*, I, p. 31.

(2) Voir F. Riesz, *Acta math.*, 48, p. 333-334.

rante harmonique. Il suffit, pour le voir, de considérer une suite de domaines ω emboîtés, complètement intérieurs au domaine donné et tendant vers ce domaine; la meilleure majorante harmonique de ω_n tend en croissant, suivant qu'il existe ou non de majorante harmonique pour Ω, vers une fonction harmonique (qui sera la plus petite majorante harmonique) ou vers $+\infty$.

Il n'est pas démontré que la meilleure majorante harmonique pour ω complètement intérieur à Ω coïncide, en général, avec la plus petite majorante harmonique pour ω. Mais c'est au moins vrai dans certains cas particuliers, par exemple lorsque ω est limité par un nombre fini de circonférences sans points communs (1).

Les flux généralisés à travers une courbe de Jordan (2). — Le flux $\int_\Gamma \frac{du}{dn_i} ds$ à travers la courbe de Jordan Γ tracée sur Ω n'a de sens que moyennant des hypothèses supplémentaires sur Γ et sur u. F. Riesz définit dans le cas général deux flux généralisés constituant une extension du précédent.

Considérons, tracées sur Ω, trois courbes de Jordan Γ_1 Γ_2 Γ_3 chacune intérieure (sens strict) à la suivante et l'anneau (Γ_1, Γ_3) étant entièrement dans Ω. Soient $h_{1,2}$, $h_{1,3}$, $h_{2,3}$, les meilleures majorantes harmoniques correspondant aux trois

---

(1) Comme je n'ai rencontré cette proposition nulle part, j'en indique brièvement une démonstration : Voici d'abord comme lemme un théorème qui se démontre par les formules de Green et que F. Riesz a indiqué pour un domaine simplement connexe.

Soit sur Ω le domaine de Dirichlet δ où l'on choisit un point fixe P; considérons les domaines (de Dirichlet) δ_λ définis par $G(M, P) > \lambda > 0$.

Soit $h_\lambda(M)$ la meilleure majorante harmonique de u sur δ_λ; ce qui nous servira de lemme est uqe $h_\lambda(P)$ est fonction convexe, donc *continue*, de λ; et encore suffirait-il que ce soit vrai pour un intervalle de λ tel que les δ_λ soient limités par un nombre constant de courbes de Jordan sans points communs, réguliers et analytiques en chaque point.

Soit alors $G_0(M, P)$ la fonction de Green du domaine ω considéré; prolongeons-la analytiquement au travers des circonférences limitantes, et soit δ le domaine $G_0 > -\epsilon$ (ϵ assez petit > 0) et $G_1 = G_0 + \epsilon$ la fonction de Green de δ. Si $h_\lambda(M)$ est la meilleure majorante harmonique du domaine $G_1 > \lambda$, $h_\lambda(P)$ est continue de λ au voisinage de $\lambda = \epsilon$.

Or, quand λ tend vers ϵ en décroissant $h_\lambda(M)$ tend vers la plus petite majorante harmonique de u sur le domaine ω, soit $h'(M)$. Donc : $h'(P) = h_\epsilon(P)$.

Puisque $h'(M) \leqslant h_\epsilon(M)$ sur ω, il s'ensuit aisément : $h'(M) = h_\epsilon(M)$.

(2) Voir F. Riesz, *Acta Szeged*, 2, p. 99, et *Acta math.*, 48, p. 340.

anneaux; pour chacune considérons le flux vers l'intérieur $\int \frac{dh}{dn_i} ds$ à travers une courbe de Jordan, par exemple à tangente continue, faisant le tour de l'anneau correspondant sur lequel elle est tracée. On définit ainsi les flux :

$$\mathrm{I}^{n_i}_{\Gamma_1,\ \Gamma_2}, \quad \mathrm{I}^{n_i}_{\Gamma_1,\ \Gamma_3}, \quad \mathrm{I}^{n_i}_{\Gamma_2,\ \Gamma_3},$$

l'indice n_i rappelant qu'on a orienté vers l'intérieur la normale de la courbe auxiliaire.

F. Riesz démontre très simplement que (1) :

$$\mathrm{I}^{n_i}_{\Gamma_1,\ \Gamma_2} \geqslant \mathrm{I}^{n_i}_{\Gamma_1,\ \Gamma_3} \geqslant \mathrm{I}^{n_i}_{\Gamma_2,\ \Gamma_3}.$$

Prenons alors une courbe de Jordan Γ tracée sur Ω; soit Γ' analogue, intérieure et voisine, et considérons le flux $\mathrm{I}^{n_i}_{\Gamma,\ \Gamma'}$; pour toute suite de courbes Γ' tendant vers Γ (la distance de tout point de Γ à Γ' tendant uniformément vers zéro), ce flux tend vers une limite finie, indépendante de la suite des Γ', soit le flux généralisé $\Phi^{n_i}_{\Gamma_i}$.

L'indice i de Γ rappelle que Γ est approchée par Γ' intérieurement, l'indice n_i que le flux pour la couronne a été défini avec une normale intérieure.

En prenant une courbe voisine contenant Γ, on définirait de même un second flux généralisé $\Phi^{n_i}_{\Gamma_e}$ également fini. Avec des normales extérieures, on définirait $\Phi^{n_e}_{\Gamma_i}$ et $\Phi^{n_e}_{\Gamma_e}$ respectivement opposés aux flux généralisés précédents.

Observons essentiellement que :

$$\Phi^{n_i}_{\Gamma_i} \geqslant \Phi^{n_i}_{\Gamma_e}$$

et que, si Γ' est intérieure à Γ :

$$\Phi^{n_i}_{\Gamma_e} \leqslant \Phi^{n_i}_{\Gamma_i} \leqslant \mathrm{I}^{n_i}_{\Gamma,\ \Gamma'} \leqslant \Phi^{n_i}_{(\Gamma')_e} \leqslant \Phi^{n_i}_{(\Gamma')_i}$$

(1) Ce n'est qu'une extension du théorème fondamental de convexité dont il a été question dans l'introduction. Voir F. Riesz, *Acta math.*, 48, p. 340.

Il resterait à voir que les *flux généralisés* $\Phi_{\Gamma_i}^{n_i}$, $\Phi_{\Gamma_e}^{n_i}$, sont égaux au *flux ordinaire* $\int_\Gamma \frac{du}{dn_i}\,ds$ lorsque celui-ci existe. Il en est bien ainsi [1] au moins dans le cas très général où u admet des dérivées premières continues, Γ étant formée d'un nombre fini d'arcs à tangente continue.

---

(1) F. Riesz ayant négligé ce point, j'indique ici une démonstration du cas proposé dans le texte.

Supposons d'abord qu'il y ait un Δu (généralisé) continu et traçons à l'intérieur de Γ une courbe voisine Γ' à tangente continue höldérienne. La fonction harmonique h dans la couronne, égale à u sur Γ et Γ' admet alors une dérivée normale continue le long de Γ'. Or :

$$\left(\frac{dh}{dn_i}\right)_{\Gamma'} \geqslant \left(\frac{du}{dn_i}\right)_{\Gamma'} \text{ donc : } \int_{\Gamma'} \frac{dh}{dn_i}\,ds \geqslant \int_{\Gamma'} \frac{du}{dn_i}\,ds$$

d'où :

$$I_{\Gamma,\,\Gamma'}^{n_i} \leqslant -\int_{\Gamma'} \frac{du}{dn_i}\,ds = \int_\Gamma \frac{du}{dn_i}\,ds + \iint_{\text{couronne}} \Delta u\, d\omega$$

On en déduit :

$$\Phi_{\Gamma_i}^{n_i} \leqslant \int_\Gamma \frac{du}{dn_i}\,ds, \quad \text{de même : } \quad \Phi_{\Gamma_e}^{n_i} \geqslant \int_\Gamma \frac{du}{dn_i}\,ds$$

La coïncidence cherchée résulte alors de la relation générale du texte :

$$\Phi_{\Gamma_e}^{n_i} \leqslant \Phi_{\Gamma_i}^{n_i}.$$

Dans le cas plus général proposé, traçons Γ' convenablement formée à l'aide des arcs parallèles à ceux de Γ, à la distance (intérieure) ε. Par médiation sur u (V. n° 3), on forme u_n sousharmonique (possédant un Δ continu) tendant en décroissant vers u. Soient, sur la couronne, h_n et h harmoniques, égales sur les contours à u_n et u respectivement. Le flux de h_n est compris entre

$$\int_\Gamma \frac{du_n}{dn_i}\,ds \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma'} \frac{du_n}{dn_i}\,ds$$

parce qu'il est compris entre les flux généralisés qui coïncident avec les flux ordinaires. A la limite, on voit que $I_{\Gamma,\,\Gamma'}^{n_i}$ est compris entre

$$\int_\Gamma \frac{du}{dn_i}\,ds \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma'} \frac{du}{dn_i}\,ds.$$

Il en résulte ($\varepsilon \to 0$) :

$$\Phi_{\Gamma_i}^{n_i} = \int_\Gamma \frac{du}{dn_i}\,ds,$$

on aurait de même :

$$\Phi_{\Gamma_e}^{n_i} = \int_\Gamma \frac{du}{dn_i}\,ds.$$

§ III. — *Sur les singularités des fonctions harmoniques* (1).

1. — Considérons la fonction u harmonique *au voisinage du point* O, *ce point exclu*. On connaît son développement (2) :

$$u(\mathrm{M}) = \text{fct. harm. en O} + \alpha \log \frac{1}{r} + \sum_{1}^{+\infty}{}_n \frac{\psi_n}{r^n}$$

$$(\mathrm{OM} = r;\ \psi_n = \mathrm{A}_n \cos n\varphi + \mathrm{B}_n \sin n\varphi;$$

$$\varphi = \text{angle polaire de OM}\ ;\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ \text{const.})$$

et les propriétés fondamentales qui s'y rattachent :

a) Si u est bornée en module, les α et ψ_n sont nuls, c'est-à-dire que u est harmonique en O (on peut la définir en O pour qu'elle y soit harmonique);

b) Si u est bornée dans un sens, ou plus généralement si :

$$u \leqslant \mathrm{K} \log \frac{1}{r} \quad \text{ou bien :} \quad u \geqslant \mathrm{K} \log \frac{1}{r} \quad (\mathrm{K} = \text{const.})$$

alors les ψ_n sont nuls et :

$$u = \text{fct. harm. en O} + \alpha \log \frac{1}{r};$$

c) Si :

$$u \leqslant \frac{\mathrm{K}}{r^\mu} \quad \text{ou bien :} \quad u \geqslant \frac{\mathrm{K}}{r^\mu} \qquad (\mu \geqslant 0)$$

les ψ_n d'indice $n > \mu$ sont tous nuls (3).

On peut aller plus loin. Désignons par $\mathfrak{M}_r\varphi(\mathrm{M})$ la moyenne d'une fonction $\varphi(\mathrm{M})$ sur la circonférence γ_r de centre O et rayon r. On déduit du développement de u :

$$\mathfrak{M}_r u = \text{const} + \alpha \log \frac{1}{r}$$

$$\mathfrak{M}_r(u\psi_i) = \text{fonction de } r \text{ bornée} + \mathfrak{M}_r \frac{\psi_i^2}{r^i}$$

---

(1) Voir sur ce sujet un article historique et bibliographique dans les *Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges.* (1932).

(2) Dans l'espace à 3 dimensions par exemple ce serait :

$$u(\mathrm{M}) = \text{fct. harm. en O} + \alpha \cdot \frac{1}{r} + \sum_{1}^{+\infty}{}_n \frac{\mathrm{Y}_n}{r^{n+1}}$$

(OM $= r$, Y_n fonction de Laplace sur la sphère unité.)

(3) Alors que (*a*) et (*b*) s'étendent immédiatement à l'espace, il faut pour cet énoncé (*c*) remplacer la condition $u > \mu$ relative aux ψ_n par la condition $n + 1 > \mu$ relative aux Y_n.

Les propriétés énoncées en résultent aisément.

Plus généralement, supposons, en posant $u^+ = \dfrac{u + |u|}{2}$, que

$$\mathcal{M}_r u^+ \leqslant \frac{K}{r^\mu} \ (\mu \geqslant 0)\ ^{(1)}.$$

La première égalité montre que :

$$\mathcal{M}_r \mid u \mid \leqslant \frac{K'}{r^\mu}$$

et la seconde entraîne alors $\psi_n \equiv 0$ pour $n > \mu$ (1).

Soulignons que la condition : $r^\mu \mathcal{M}_r u^+$ borné, entraîne : $r^\mu \mathcal{M}_r |u|$ borné, d'où l'équivalence de ces conditions.

2. Ensemble de capacité nulle (2). — Rappelons qu'un ensemble borné fermé E de capacité nulle est nécessairement de mesure *nulle*, ne peut partager un domaine en deux autres et que toute section par une droite ou une circonférence est de mesure *nulle* sur cette courbe. Sa propriété *caractéristique* est que toute fonction harmonique *bornée* définie au voisinage d'un point O de E, et, à l'extérieur de E, peut être prolongée de façon à devenir harmonique sur le voisinage complet de O.

Soit η un ensemble fermé contenant E et u la solution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine s'étendant d'une grande circonférence γ (contenant η) jusqu'à η, avec la valeur 0 sur γ et 1 sur η. Si η varie dans une suite emboîtée $\eta_n \to E$ (η_n étant d'ailleurs nécessairement d'extérieur connexe à partir d'un certain rang), $u \to 0$.

---

(1) Dans l'espace à 3 dimensions, on *supposera* $\mu \geqslant 1$ et on remplacera la condition $n > \mu$ relative aux ψ_n par la condition $n + 1 > \mu$ pour les Y_n qui doivent s'annuler.

(2) Voir plus spécialement l'article précité du *Jahresbericht*, 1932 ou de *Mathematica*, 1933.

CHAPITRE II

LES FONCTIONS SOUSHARMONIQUES AU VOISINAGE D'UN POINT O SINGULIER OU NON

§ I. — *Valeurs moyennes en* O. — *Le flux en* O.

1. — On considérera, dans les conditions les plus générales, une fonction $u(\mathrm{M})$ définie et sousharmonique *au voisinage d'un point* O, *ce point exclu.* Nous allons établir des propriétés générales de l'allure de u au point O.

Un *lemme fondamental* pour toute cette étude est le théorème suivant dû à F. Riesz, et qui s'applique d'ailleurs à une couronne quelconque au lieu d'un cercle pointé.

La valeur moyenne $\mathfrak{M}_r u$ *est fonction convexe de* $\log \dfrac{1}{r}$ (1). Cela résulte aisément de ce qu'elle est linéaire dans le cas harmonique. On songera constamment à la courbe représentative $\mathfrak{M}_r u = f(t)$ $\left[t = \log \dfrac{1}{r}\right]$ et l'on va voir comment l'interprétation en fonction de u de divers éléments de cette courbe (ordonnée, rayon vecteur, direction asymtotique, corde, demi-tangente) transforme des propriétés simples des fonctions convexes en propriétés remarquables de l'allure de u.

2. — *Premières applications.* — Posons :

$$u(\mathrm{M}) = \lambda(\mathrm{M}) \log \frac{1}{\mathrm{OM}}.$$

a) *Quand* r *(assez petit) tend vers* 0 *(en décroissant),* $\mathfrak{M}_r \underline{u}$ *tend (en croissant) vers* $+\infty$ *ou (en décroissant) vers une*

(1) Voir F. Riesz, *Acta Szeged*, 1, p. 29, et *Acta math.*, 48, p. 338.

limite finie ou vers $-\infty$. On notera la limite $\mathfrak{M}_0 u$ ou $u_m(0)$ (*valeur moyenne en* 0).

b) *Dans les mêmes conditions* $\dfrac{\mathfrak{M}_r u}{\log \dfrac{1}{r}}$ *ou* $\mathfrak{M}_r \lambda$ *tend* (*en croissant ou en décroissant*) *vers une limite finie ou vers* $+\infty$, soit $\mathfrak{M}_0\lambda$ ou $\lambda_m(0)$.

c) Si $u_m(0) = +\infty$, $\lambda_m(0) > 0$ (et *non nul*) [1].

3. — Soit $\mu_r\varphi(M)$ la *borne supérieure* d'une fonction $\varphi(M)$ sur γ_r. On a vu (p. 15) que $\mu_{OM}u$ est une fonction sousharmonique de M.

Donc $\mu_r u$ *est fonction convexe de* $\log \dfrac{1}{r}$ [2].

Conséquences : a) Quand r (assez petit) $\to 0$ (en décroissant), $\mu_r u$ tend (en croissant) vers $+\infty$ ou (en décroissant) vers une limite finie ou vers $-\infty$.

La limite $\mu_0 u$ est d'ailleurs la plus grande limite $\overline{u(0)}$ de u en 0.

b) Dans les mêmes conditions, $\mu_r\lambda$ tend (en croissant ou décroissant) vers une limite finie ou égale à $+\infty$, soit $\mu_0\lambda$, égale à la plus grande limite $\overline{\lambda(0)}$ de λ en 0.

c) Si $\overline{u(0)} = +\infty$, $\overline{\lambda(0)} > 0$.

4. — Introduisons les fonctions :

$$\overset{+}{u}(M) = \frac{u + |u|}{2} \geqslant 0, \qquad \overset{+}{\lambda}(M) = \frac{\lambda + |\lambda|}{2} \geqslant 0.$$

On a :

$$u \leqslant \overset{+}{u} \leqslant |u| \qquad \overset{+}{u}(M) = \overset{+}{\lambda}(M) \log \frac{1}{OM}$$
$$\lambda \leqslant \overset{+}{\lambda} \leqslant |\lambda|$$

La fonction $\overset{+}{u}(M) \geqslant 0$ est sousharmonique; donc $\overset{+}{u}$ *et* $\overset{+}{\lambda}$ *jouissent des propriétés énoncées précédemment pour* u *et* λ.

---

(1) Ajoutons encore que si $\lambda_m(0)$ est fini, $\mathfrak{M}_r u - \lambda_m(0) \log \dfrac{1}{r}$ décroît vers une limite finie ou vers $-\infty$ quand r décroît à 0 (ordonnée à l'origine de l'asymptote).

(2) Ce théorème de convexité pour une couronne peut être aussi établi par le même raisonnement qu'a donné Walther pour démontrer la proposition dans le cas *harmonique* (*Math. Zeits.*, 11 (1921), p. 158). Voir aussi Polya et Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 1, p. 145 et 322, proposition n° 320.

Conséquences : Observons que $|u| = 2\overset{+}{u} - u$, $|\lambda| = 2\overset{+}{\lambda} - \lambda$, et que si $\mathfrak{M}_r u$ ou $\mathfrak{M}_r \lambda$ tend vers $+\infty$, il en est de même de $\mathfrak{M}_r|u|$ ou $\mathfrak{M}_r|\lambda|$. Par suite, *quand* $r \to 0$, $\mathfrak{M}_r|u|$ et $\mathfrak{M}_r|\lambda|$ *ont des limites, finies ou non,* soit $\mathfrak{M}_0|u|$ et $\mathfrak{M}_0|\lambda|$.

Plus généralement on peut introduire l'enveloppe supérieure U_K de u et d'une constante quelconque K :

$$U_K = \frac{u + K + |u - K|}{2} \geqslant K.$$

$$U_K = \Lambda_K \log \frac{1}{OM} \text{ est sousharmonique.}$$

On en déduit que $\mathfrak{M}_r|u - K|$ a une limite pour $r \to 0$.

Observons aussi que :

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_0 U_K &= \mathfrak{M}_0 \overset{+}{u} + \theta K \\ \mathfrak{M}_0 \Lambda_K &= \mathfrak{M}_0 \overset{+}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (-1 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

en sorte que $\mathfrak{M}_0 U_K$ et $\mathfrak{M}_0 \overset{+}{u}$ d'une part, $\mathfrak{M}_0 \Lambda_K$ et $\mathfrak{M}_0 \overset{+}{\lambda}$ d'autre part, sont simultanément finis ou non.

5. Le flux en O. — Considérons deux circonférences γ_r, γ_r' de centre O et reportons-nous aux notations concernant la meilleure majorante harmonique et les flux généralisés (chap. I, § II, n° 5). F. Riesz [1] a donné une formule qui fournit une

---

(1) *Acta math.*, 48, p. 340. Voici brièvement une démonstration :

Soit sur γ_r et $\gamma_{r'}$ la suite décroissante w_n de fonctions continues tendant vers u et h_n la fonction harmonique correspondante sur la couronne, tendant vers la meilleure majorante harmonique h. $\mathfrak{M}_\rho h_n$ étant linéaire en $\log \frac{1}{\rho}$

$$\frac{\mathfrak{M}_r w_n - \mathfrak{M}_{r'} w_n}{\log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{r'}} = \frac{d\mathfrak{M}_\rho h n}{d \log \frac{1}{\rho}} = \frac{d}{d \log \frac{1}{\rho}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\rho, \theta) d\theta \right] \quad (r\, |\rho|\, r')$$

Donc :

$$\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{dh_n}{dn_i} ds = (-\rho) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dh_n(\rho, \theta)}{d\rho} d\theta =$$

$$= \frac{d}{d \log \frac{1}{\rho}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n d\theta = \frac{\mathfrak{M}_r w_n - \mathfrak{M}_{r'} w_n}{\log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{r'}}.$$

Le passage à la limite sur les termes extrêmes donne le résultat cherché.

La même démonstration conduit à l'énoncé plus général suivant : Soient sur γ_r et $\gamma_{r'}$ des suites décroissantes de fonctions continues w_n tendant vers les fonctions φ_r et $\varphi_{r'}$ sommables; la fonction harmonique h_n sur la couronne

interprétation remarquable *de la pente d'une corde* dans la représentation graphique de $\mathfrak{M}_r u$ en fonction de $\log \frac{1}{r}$. C'est :

$$\frac{1}{2\pi} \mathrm{I}^{n_i}_{\gamma_r, \gamma_{r'}} = \frac{\mathfrak{M}_r u - \mathfrak{M}_{r'} u}{\log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{r'}},$$

d'où résulte, en particulier, que $\mathrm{I}^{n_i}_{\gamma_r, \gamma_{r'}} \to 2\pi\lambda_m(0)$ lorsque, r étant fixe, $r' \to 0$.

Il s'ensuit, d'autre part, une *interprétation des demi-tangentes*. En effet, si $r' \to r$ par valeurs inférieures, les deux membres tendent respectivement vers $\frac{1}{2\pi} \Phi^{n_i}_{(\gamma_r)_i}$ et vers la dérivée à droite $\overset{+}{p}_r$ de $\mathfrak{M}_r u$ fonction de $\log \frac{1}{r}$.

Ainsi : $\Phi^{n_i}_{(\gamma_r)_i} = 2\pi \overset{+}{p}_r$, et, de même : $\Phi^{n_i}_{(\gamma_r)_e} = 2\pi \overset{-}{p}_r$.

Quand $r \to 0$, $\overset{+}{p}_r$ et $\overset{-}{p}_r$ tendent vers $\gamma_m(0)$, pente de la direction asymptotique de la courbe représentative. Donc, *quand* $r \to 0$ *(en décroissant), les flux généralisés relatifs à* γ_r $\Phi^{n_i}_{(\gamma_r)_i}$ *et* $\Phi^{n_i}_{(\gamma_r)_e}$ *tendent vers* $2\pi\lambda_m(0)$ *(en croissant).*

Considérons maintenant *une suite quelconque de courbes de Jordan* Γ_n *entourant* 0 *et tendant vers* 0 (la distance de 0 à Γ_n tendant vers 0). En comparant avec une suite de circonférences γ_{r_n} où $r_n \to 0$, on démontrera, grâce aux relations entre les flux généralisés de courbes emboîtées, que $\Phi^{n_i}_{(\Gamma_n)_i}$ et $\Phi^{n_i}_{(\Gamma_n)_e}$ *tendent aussi vers* $2\pi\lambda_m(0)$.

La quantité $2\pi\lambda_m(0)$ sera donc naturellement appelée *le flux en* 0 *de la fonction* u, soit Φ_0, d'ailleurs fini ou égal à $+\infty$.

---

prenant les valeurs frontières w_n tend vers une fonction harmonique h dont le flux (n_i) pour une circulation autour de 0, divisé par 2π est égal à :

$$\frac{\mathfrak{M}_r \varphi_r - \mathfrak{M}_{r'} \varphi_{r'}}{\log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{r'}}$$

Il suffit de voir que h_n ne tend pas partout vers $-\infty$, ce qui résulte de la formule :

$$h_n(\mathrm{M}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{contour}} w_n \frac{d\mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})}{dn_i} ds_{\mathrm{P}}.$$

Ainsi $\lambda_m(O)$ prend une nouvelle signification résumée dans la formule $\Phi_0 = 2\pi\lambda_m(O)$.

L'interprétation de l'asymptote de la courbe

$$\mathfrak{M}_r u = f\left(\log \frac{1}{r}\right)$$

peut fournir divers résultats. On trouve, par exemple, que si cette asymptote est à distance finie,

$$\left(\Phi^{n_i}_{(\gamma_r)e \text{ ou } i} - \Phi_0\right) \log \frac{1}{r} \to 0 \text{ avec } r.$$

En particulier, si $u_m(O)$ est fini, $\Phi_0 = 0$ et les flux $\Phi^{n_i \text{ ou } n_e}_{(\gamma_r)e \text{ ou } i}$ tendent vers zéro plus vite que $\dfrac{1}{\log \frac{1}{r}}$.

D'ailleurs, soulignons que, inversement, si $\Phi_0 = 0$,:

$$u_m(O) \neq +\infty.$$

6. Cas particulier de u fonction de r seul. — C'est le cas de u fonction convexe quelconque de $\log \frac{1}{r}$. Disons pour l'essentiel que u, λ, $|u|$, $|\lambda|$ ont des limites déterminées quand $M \to O$ et que $r\left(\frac{du}{dr}\right)^+$ et $r\left(\frac{du}{dr}\right)^-$ tendent vers $-2\pi\lambda_m(O)$ pour $r \to 0$.

Ajoutons que, dans ce cas particulier, on forme aisément un exemple où $\Phi_0 = \lambda_m(O) = 0$, tandis que $u_m(O) = -\infty$.

§ II. — *Cas de u bornée supérieurement ou sousharmonique en O. Extension au voisinage d'un ensemble fermé de capacité nulle.*

1. — Supposons maintenant que u soit bornée supérieurement au voisinage de O. Nous allons voir qu'*il est possible, et d'une seule manière, de définir u en O de façon qu'elle y soit sousharmonique*, c'est-à-dire qu'elle soit sousharmonique sur le voisinage de O, ce point inclus, *la valeur à prendre en O étant d'ailleurs nécessairement la valeur commune de* $\overline{u(O)}$ (O exclu) et $u_m(O)$, qui sont alors égales.

2. — *Lemme.* — I_R étant l'intégrale de Poisson relative aux valeurs de u sur la circonférence γ_R (centre O, rayon R, domaine intérieur ω_R), on a sur le domaine $(\omega_R - O)$:

$$u \leqslant I_R$$

Il suffit de constater la même inégalité avec l'intégrale de Poisson I_R^w relative à une distribution continue $w \geqslant u$. On peut même supposer que u et $w \leqslant 0$. Alors en M de $(\omega_R - O)$, on aura, ρ étant assez petit et $G_\rho(M,P)$ désignant la fonction de Green de la couronne (γ_R, γ_ρ) :

$$u(M) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R} w(P)\frac{dG_\rho}{dn_i}\, ds_P$$

puisque $u \leqslant 0$ le long de γ_ρ.

Quand ρ décroît à 0, G_ρ croît et tend vers la fonction de Green G de γ_R, tandis que $\left(\frac{dG_\rho}{dn_i}\right)_{\gamma_R}$ tend en croissant vers $\left(\frac{dG}{dn_i}\right)_{\gamma_R}$, d'où, à la limite :

$$u(M) \leqslant I_R^w.$$

On donnera plus loin une autre démonstration dans un cas plus général.

Corollaire I. — La valeur $I_R(O)$ de I_R au centre O, c'est-à-dire $\mathfrak{M}_R u$, décroît quand R décroît à 0. On retrouve ainsi la propriété d'existence de $u_m(O)$. D'ailleurs, la propriété de décroissance précédente, donnée par F. Riesz dans l'hypothèse que u est sousharmonique même en O, résulte aussitôt, dans notre hypothèse *a priori* plus générale, du théorème fondamental de convexité.

Corollaire II. — La signification même de $u_m(O)$ exige : $u_m(O) \leqslant \overline{u(O)}$ (plus grande limite en O, ce point exclu).

Le lemme précédent entraîne :

$$\overline{u(O)} \leqslant I_R(O) = \mathfrak{M}_R u,$$

donc :

$$\overline{u(O)} \leqslant u_m(O).$$

Par suite :

$$\overline{u(O)} = u_m(O).$$

3. — Pour que la valeur u_0 à attribuer à u en O réponde à la question initiale, il faut et suffit, d'après les critères connus de sousharmonicité, que :

1° u_0 soit fini ou égal à $-\infty$;

2° u_0 soit borne supérieure de u en O (ce point inclus);

3° $u_0 \leqslant \mathfrak{M}_R u$ quel que soit R, c'est-à-dire $u_0 \leqslant u_m(O)$.

La seconde condition exige $u_0 \geqslant \overline{u(O)}$; donc, d'après la troisième :

$$u_0 = u_m(O) = \overline{u(O)},$$

et l'on constate que cette valeur unique remplit les 3 conditions.

4. — *La notion de quasi-limite.* — Soit $\varphi(M)$ une fonction quelconque finie ou non, définie au voisinage d'un point O, *ce point exclu*. On dira qu'elle admet en O une *quasi-limite* égale à Q (fini ou non) s'il est possible de supprimer de chaque circonférence γ_r de centre O un ensemble de points de mesure *angulaire* tendant vers 0 avec r, de sorte que, *sur le voisinage restant*, $\varphi(M)$ tende régulièrement vers Q quand $M \rightarrow O$. Si φ est finie et continue hors de O et admet en O une quasi-limite finie, on dira, en accord avec une définition antérieurement donnée [1], que φ est *quasi-continue* en O.

Lorsque φ est sommable sur les circonférences γ_r et que $\mathfrak{M}_r\varphi$ tend pour $r \rightarrow 0$ vers une limite *finie* $\varphi_m(O)$ égale à $\overline{\varphi(O)}$, on démontre [2] que $\varphi_m(O)$ est quasi-limite de φ en O [3].

D'après cela : *une fonction sousharmonique u admet en chaque point O de son domaine une quasi-limite et une valeur moyenne qui lui sont égales, et d'ailleurs égales à sa borne supérieure en ce point et même à sa plus grande limite en O* (**O *exclu***) :

$$u(O) \text{ (fini ou } -\infty) = \text{quasi-limite en } O = u_m(O) = \overline{u(O)}, \text{ O exclu}$$
$$= \text{borne sup. en O [4].}$$

alors :

ou bien il y a une limite déterminée quand $M \rightarrow O$, et c'est $u(O)$,

ou bien, il n'y en a pas, *même* si $M \rightarrow O$ en restant $\neq O$ (discontinuité *essentielle*).

---

(1) Voir thèse, *loc. cit.*, p. 49, ou *Annales de l'Ecole normale*, 1931, p. 201.

(2) La démonstration donnée dans ma thèse dans des conditions moins générales et à propos de la quasi-continuité s'applique encore.

(3) De même, en remplaçant $\varphi\overline{(O)}$ par $\underline{\varphi}(O)$.

(4) Si $u_m(O) = -\infty$, $u(M)$ tend régulièrement vers $-\infty$ quand $M \rightarrow O$

5. — Occupons-nous maintenant de l'*allure de* λ *en* O.

Lemme. — Avec les mêmes notations que dans le lemme précédent (n° 2), on a sur $(\omega_R - O)$.

$$u(M) \leqslant \lambda_m(O) \log \frac{R}{OM} + I_R,$$

où le second membre est d'ailleurs *la plus petite majorante harmonique* de u sur $(\omega_R - O)$.

Considérons en effet la couronne γ_R, γ_r $(r \to 0)$ et sur elle la meilleure majorante harmonique h_r (bornée supérieurement comme u) et qui est aussi la plus petite majorante harmonique sur cette couronne (voir p. 18). Quand r décroît à 0, h_r tend en croissant vers une fonction harmonique h qui sera la plus petite majorante harmonique sur $(\omega_R - O)$ et le flux de h en O sera la limite du flux $I^{n_i}_{\gamma_R, \gamma_r}$ de h_r autour de O, c'est-à-dire justement le flux de u en O. Comme h est bornée supérieurement comme u :

$$h = \lambda_m(O) \log \frac{1}{OM} + \text{fct. harm. dans } \omega_R$$

ou :
$$h = \lambda_m(O) \log \frac{R}{OM} + \theta(M) \text{ harmonique même en O.}$$

Il s'agit de voir que $\theta = I_R$. Or θ est dans $(\omega_R - O)$ la plus petite majorante harmonique de $w = u - \lambda_m(O) \log \dfrac{R}{OM}$, qui est sousharmonique, bornée supérieurement et prend les valeurs de u sur γ_R. Donc d'après le lemme du n° 2 :

$$\theta \leqslant I_R.$$

Mais θ est harmonique même en O; comme elle est majorante au voisinage :

$$\theta(O) \geqslant \overline{w(O)}; = w_m(O);$$

elle est donc majorante harmonique, sur tout le domaine ω_R, de w considérée comme sousharmonique même en O. Et puisque la plus petite majorante harmonique de cette fonction w dans ω_R est, comme on sait, I_R (voir pp. 17-18), on aura : $\theta \geqslant I_R$.

D'où résulte bien : $\theta = I_R$.

Conséquences. — $\overline{\lambda(O)} = \lambda_m(O)$ *fini; et* $\lambda(M)$ *admet en* O *une quasi-limite égale à cette valeur commune.*

6. Cas de u définie et bornée supérieurement au voisinage d'un ensemble borné fermé E de capacité nulle.

Soit O un point de E, et supposons u sousharmonique, *bornée supérieurement*, définie au voisinage de O sur l'extérieur de E. Comme dans le cas particulier où E se réduit au seul point O, *il est possible et d'une seule façon de prolonger u sur* E *au voisinage de* O *de façon que u soit sousharmonique sur le voisinage complet;* et la valeur à prendre en chaque point P de E est *la plus grande limite* $\overline{u(P)}$ *en ce point de u considérée sur l'extérieur de* E.

On pourrait procéder d'une façon parallèle à la méthode employée dans le cas d'un point unique. Plus brièvement, observons d'abord la non-multiplicité *a priori* du prolongement; s'il est possible, la valeur en chaque point de E est en effet la valeur moyenne en ce point, et celle-ci ne dépend que des valeurs primitives de u puisque c'est la limite d'une valeur moyenne sur une circonférence dont la section par E est de mesure nulle. Montrons alors que la fonction u prolongée par les valeurs $\overline{u(P)}$ sur E est sousharmonique sur le voisinage complet de O. On voit d'abord aisément que les trois premières conditions de sousharmonicité sont remplies. Quant à la dernière, considérons un domaine ω quelconque sur le voisinage de O; soit H harmonique sur ω et prenant sur la frontière des valeurs déterminées en distribution continue et au moins égale à u prolongée. Montrons que H est une majorante harmonique de cette fonction u prolongée.

Soit δ_n une suite d'ensembles fermés constitués par des quadrillages emboîtés, tendant vers E, qui leur est complètement intérieur; soit Ω_n le domaine que constitue, pour n assez grand, la portion extérieure à δ_n d'un grand cercle Γ contenant E, ω_n la portion de ω extérieure à δ_n et ω' la portion de ω extérieure à E. Soit $\mu < 0$ une limite inférieure de H, et $A > 0$ une limite supérieure de u, enfin $w_n \geqslant 0$, la solution du problème de Dirichlet pour Ω_n, la valeur 0 sur Γ et la valeur $A - \mu$ sur le bord du quadrillage δ_n. Il est visible que $H + w_n$ est au moins égale à u à la frontière du domaine ω_n qui est complètement

intérieur à la région de sousharmonicité de la fonction u donnée; donc : $H + w_n \geqslant u$ sur ω_n, et comme $w_n \rightarrow 0$ (voir p. 22) en tout point de ω', $H \geqslant u$ sur ω' (1). Il s'ensuit aussitôt la même inégalité sur ω avec la fonction u prolongée.

§ III — *Les majorantes harmoniques au voisinage de O dans le cas général. Les deux cas fondamentaux.*

A. — Critère d'existence d'une majorante harmonique.

1. — Reprenons dans le cas le plus général la fonction sousharmonique u au voisinage du point O, ce point unique exclu. Remarquons d'abord que s'il existe pour u une majorante harmonique sur un voisinage de O, il en existe une pour tout voisinage (dont la frontière, sauf O, appartient au domaine d'existence de u); c'est ce qui résulte d'une application convenable de la méthode alternée (2), et l'on voit même que la nouvelle majorante harmonique ainsi obtenue ne diffère de la première sur la partie commune aux deux voisinages que d'une fonction harmonique *même en* O. Il n'y a donc pas lieu, quant à l'existence d'une majorante harmonique au voisinage de O, de préciser ce voisinage.

2. — Il n'existe pas toujours de *majorante harmonique; une condition nécessaire et suffisante d'existence est que* $\lambda_m(O) = \dfrac{\Phi_0}{2\pi}$ *soit fini.*

Considérons, en effet, deux circonférences γ_R fixe et γ_r. On a vu que $I^{n_i}_{\gamma_R, \gamma_r}$ tend vers $2\pi\lambda_m(O)$ quand $r \rightarrow 0$ (3). D'autre

(1) Cela fournit une autre démonstration pour le lemme du n° 2.

(2) On tracera deux circonférences assez petites de centre O et on opérera sur l'intérieur de la plus grande à partir de la majorante connue et sur l'extérieur de la plus petite dans le second voisinage considéré, à la frontière duquel voisinage (O excepté) on se donnera une distribution continue au moins égale à u.

(3) Voir plus haut p. 26. Voici une proposition du même genre beaucoup plus générale : soit ω un domaine-voisinage de O, dont la frontière, O exclu, soit σ, est tracée sur le voisinage où u est définie; soit ω_n un domaine analogue contenu dans ω, de frontière (moins O) σ_n tracée sur ω, enfin se réduisant à 0 pour n ∞ (de diamètre $\rightarrow$ 0). On considère pour $\delta_n = \omega - (\omega_n + \sigma_n)$ la meilleure majorante harmonique, ou bien encore la fonction harmonique obtenue

part, la meilleure majorante harmonique h_r pour la couronne tend en croissant, quand r décroît à 0, vers une fonction harmonique h ou vers $+\infty$ suivant qu'il existe ou non une majorante harmonique de u au voisinage de 0.

Dans le premier cas, le flux $I^{n_i}_{\gamma_R, \gamma_r}$ a une limite finie (égale au flux en 0 de h), vu la convergence uniforme des dérivées; il suffira de voir que dans le second cas il tend vers $+\infty$.

Or, soit la constante $K > u$ sur γ_R; introduisons la fonction harmonique φ_r obtenue comme h_r, mais en remplaçant sur la circonférence γ_R la suite de distributions tendant vers u par la distribution constante K. Par passage à la limite dans la définition de h_r et φ_r, on voit que $h_r \leqslant \varphi_r$ et que le flux de φ_r est au plus égal à celui $I^{n_i}_{\gamma_R, \gamma_r}$ de h_r. Il suffit donc (1) de voir que ce flux, d'ailleurs égal à $\int_{\gamma_R} \frac{d\varphi_r}{dn_i}\, ds$, tend vers $+\infty$ quand $r \to 0$.

Considérons la circonférence γ_ρ fixe ($\rho < R$), et soit α_r le minimum de φ_r sur γ_ρ : α_r tend vers $+\infty$ quand $r \to 0$. Dans la couronne (γ_R, γ_ρ), φ_r est au moins égale à la fonction harmonique ψ_r qui prend les valeurs K et α_r sur les circonférences γ_R et γ_ρ :

$$\varphi_r \geqslant \psi_r = A_r \log \frac{1}{OM} + B_r \quad \text{avec} \quad A_r = \frac{\alpha_r - K}{\log \frac{1}{\rho} - \log \frac{1}{R}}$$

Le long de γ_R,

$$\frac{d\varphi_r}{dn_i} \geqslant \frac{d\psi_r}{dn_i} = \frac{A_r}{R} \to +\infty \text{ quand } r \to 0\,,$$

d'où il résulte bien que le flux de φ_r tend vers $+\infty$ quand $r \to 0$.

---

de façon analogue en remplaçant *sur* σ la suite de distributions décroissantes vers u par une distribution continue *fixe* quelconque. Le flux de telles fonctions harmoniques correspondant à une circulation autour de O tend vers $2\pi\lambda_m(O)$ quand $n \to +\infty$, et ces fonctions harmoniques, comme dans le cas particulier du texte, tendent vers une fonction harmonique ou vers $+\infty$ suivant que $\lambda_m(O)$ est fini ou non.

(1) D'ailleurs, le flux de φ_r est égal à $2\pi \dfrac{K - \mathfrak{M}_r u}{\log \frac{1}{R} - \log \frac{1}{r}} \to 2\pi\lambda_m(O)$ pour $r \to 0$.

B. — **Etude des majorantes harmoniques lorsqu'il en existe.**

3. — D'abord (voir n° 1) *les plus petites majorantes harmoniques* pour deux voisinages de O ne diffèrent que d'une fonction *harmonique en* O.

D'autre part, la meilleure majorante harmonique pour la couronne (γ_R, γ_r) est aussi la plus petite majorante harmonique sur cette couronne et tend, pour $r \to 0$, vers la plus petite majorante harmonique sur l'intérieur (moins O) du cercle γ_R; celle-ci a donc pour flux $2\pi\lambda_m(O)$.

Donc, sans qu'il y ait lieu de préciser le voisinage :

1° La plus petite majorante harmonique a même flux en O que u;

2° Les majorantes harmoniques diffèrent des plus petites majorantes harmoniques d'une fonction de la forme :

$$K \log \frac{1}{OM} + \text{fct. harm. en O} \qquad (k \geqslant 0),$$

donc ont en O un flux au moins égal à celui de u.

4. — Etudions le *développement en série de la plus petite majorante harmonique h* et ses cas de réduction. Nous allons voir comment des limitations en moyenne sur u ou $|u|$ entraînent des limitations ordinaires pour u. Ecrivons le développement de h (Voir chap. I, § III) :

$$h(M) = \text{fct. harm. en O} + \lambda_m(O) \cdot \log \frac{1}{r} + \sum_{1}^{+\infty}{}_n \frac{\psi_n}{r^n} \text{ (1)}.$$

Pour que ce développement de h se réduise à un nombre fini de termes, il faut et suffit que, pour un certain nombre $\mu \geqslant 0$, $r^\mu \mathfrak{M}_r \overset{+}{u}$ *soit borné* (2). *Lorsqu'il en est ainsi, tous les* ψ_n

(1) Dans l'espace à 3 dimensions u serait :

$$h(M) = \text{fct. harm. en O} + \lambda_m(O) \cdot \frac{1}{r} + \sum_{1}^{+\infty}{}_n \frac{Y_n}{r^{n+1}}.$$

(2) D'après § I, n° 4 :

$$|\mathfrak{M}_r \overset{+}{u} - \mathfrak{M}_0 U_K| \leqslant |K|$$

quel que soit K, d'où une condition équivalente à celle de l'énoncé en remplaçant $\mathfrak{M}_r u$ par $\mathfrak{M}_r U_K$.

d'indice $n < \mu$ sont nuls (1), *et, par suite :*

$$\text{si } \mu \geqslant 1 \qquad u \leqslant \frac{A}{r^p} \quad (A \geqslant 0;\ p \text{ partie entière de } \mu)$$

$$\text{si } \mu < 1 \qquad u \leqslant \lambda_m(O) \log \frac{1}{r} + \text{const}\ (2).$$

Posons, en effet : $u(M) = h(M) + \sigma(M)$, où $\sigma(M)$ est sousharmonique, $\leqslant 0$ et de flux nul en O.

On constatera, en examinant les divers cas, que l'on a toujours :

$$\overset{+}{h} \leqslant \overset{+}{u} - \sigma, \quad \text{d'où, puisque :} \quad \frac{\mathfrak{M}_r \sigma}{\log \frac{1}{r}} \to 0$$

$$r^\mu \mathfrak{M}_r \overset{+}{h} \leqslant r^\mu \mathfrak{M}_r \overset{+}{u} + \varepsilon,$$

pour r assez petit.

Il suffit alors d'appliquer une proposition donnée plus haut sur les fonctions harmoniques (voir p. 22).

Observons d'ailleurs que, sans aucune hypothèse sur u, *la condition que $r^\mu \mathfrak{M}_r \overset{+}{u}$ soit borné entraîne* (3) *celle que $r^\mu \mathfrak{M}_r |u|$ le soit; il y a donc équivalence entre ces conditions* (4).

Cela résulte aisément de $|u| = 2\overset{+}{u} - u$ et de ce que $\dfrac{\mathfrak{M}_r u}{\log \frac{1}{r}}$ est borné inférieurement.

C. — **Etude du cas où les** (5) **majorantes harmoniques sont de la forme :**

$$K \log \frac{1}{OM} + \text{fct. harm. en } O.$$

c'est-à-dire où λ est bornée supérieurement.

5. — *Pour que u admette une majorante harmonique de cette forme, il faut et suffit que $\mathfrak{M}_0 \lambda^+$ soit fini; et, s'il en est ainsi,*

---

(1) Dans l'espace à 3 dimensions, il faudra lire : les Y_n d'indice n tels que $n + 1 > \mu$ sont nuls.

(2) Dans le cas de l'espace à 3 dimensions, on lira, plus simplement : la condition : $r^\mu \mathfrak{M}_r \overset{+}{u}$ borné, entraîne $u \leqslant \dfrac{A}{r^p}$ où p est la partie entière de μ.

(3) Dans le cas de l'espace à 3 dimensions, il faut supposer $\mu \geqslant 1$.

(4) Un critère équivalent s'obtiendrait encore en remplaçant $\mathfrak{M}_r |u|$ par $\mathfrak{M}_r |u - K|$.

(5) D'après le n° 3, s'il y en a une de cette forme, elles sont toutes de cette forme.

ce qui entraîne que $\lambda_m(0)$ soit fini, la plus petite majorante harmonique sur l'intérieur moins 0 du cercle γ_R est :

$$\lambda_m(0) \log \frac{R}{0M} + I_R,$$

I_R étant l'intégrale de Poisson correspondant aux valeurs de u sur la circonférence γ_R.

D'ailleurs, la condition que $\mathcal{M}_0\lambda^+$ soit fini entraîne celle que $\mathcal{M}_0|\lambda|$ soit fini et lui est donc équivalente.

La première partie de l'énoncé résulte de ce qui précède; la dernière partie sur l'équivalence des conditions vient de : $|\lambda| = 2\lambda^+ - \lambda$ et de ce que $\mathcal{M}_0\lambda \neq -\infty$.

Quant à la plus petite majorante harmonique, elle est de la forme $\lambda_m(0) \log \dfrac{1}{0M}$ + fct harm. en 0. Donc :

$$u - \lambda_m(0) \log \frac{R}{0M} = v$$

qui est sousharmonique est bornée supérieurement et a un flux nul en 0. On sait alors (voir p. 30) que la plus petite majorante harmonique de v sur l'intérieur de γ_R moins 0 est l'intégrale de Poisson pour les valeurs de v sur γ_R, c'est-à-dire justement I_R, et le théorème s'ensuit.

6. — Du théorème précédent résultent les *critères* suivants, *nécessaires et suffisants :*

Critère pour que $\lambda(M)$ soit bornée supérieurement :

$$\mathcal{M}_0\overset{+}{\lambda}(= \mathcal{M}_0\Lambda_K) \text{ fini} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{M}_0|\lambda| \text{ fini}$$

Critère pour que $u(M)$ soit bornée supérieurement :

$$\mathcal{M}_0\overset{+}{\lambda}(= \mathcal{M}_0\Lambda_K) = 0, \qquad \text{ou : } \mathcal{M}_0\overset{+}{u} \text{ fini}^{(1)}, \quad (\text{ou } \mathcal{M}_0 U_K \text{ fini})$$

---

(1) Voici une démonstration directe de ce critère : Si $h(M)$ est la meilleure majorante harmonique dans la couronne $\Gamma_r(\gamma_R, \gamma_r)(r \to 0)$; on a en $M_0 \neq 0$, G_r étant de la fonction de Green de Γ_r :

$$u(M_0) \leqslant h(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R} u(M) \frac{dG_r(M, M_0)}{dn_i} ds_M + \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r} u(M) \frac{dG_r(M, M_0)}{dn_e} ds_M$$

d'où, si G est la fonction de Green de γ_R et g_r le maximum de $\dfrac{dG_r(M, M_0)}{dn_e}$ le long de γ_r :

$$u(M_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R} \overset{+}{u} \frac{dG(M, M_0)}{dn_i} ds_M + r \cdot g_r \mathcal{M}_r \overset{+}{u}$$

Le théorème résulte alors de ce que $r.g_r \to 0$ avec r, pour M_0 fixe.

7. — Dans la même hypothèse sur les majorantes harmoniques, c'est-à-dire *dans le cas général où* $\lambda(M)$ *est bornée supérieurement,* λ *et* u *ont des propriétés remarquables* qui sont l'extension de celles déjà rencontrées dans le cas plus particulier où u est bornée supérieurement.

D'abord, d'après ce qui précède : $\overline{\lambda(O)} = \lambda_m(O)$ fini, de sorte que λ admet en O une *quasi-limite* égale à cette valeur commune; et si u est continue hors de O, λ est quasi-continue en O.

De même : $\overline{u(O)} = u_m(O)$ *fini ou égal* à $\pm\infty$ et u admet toujours en O une quasi-limite égale à cette valeur commune (avec quasi-continuité si u est continue hors de O et si $u_m(O)$ est finie).

On l'a vu en effet dans le cas de u bornée supérieurement; dans le cas contraire, $\overline{u(O)} = +\infty$, donc $\overline{\lambda(O)} = \lambda_m(O) > 0$ (voir § I, n° 3) et u est de la forme :

$$\lambda_m(O) \log \frac{1}{OM} + v, \quad \text{où } v \text{ est de flux nul en O,}$$

donc, tel que :

$$\frac{\mathfrak{M}_r v}{\log \dfrac{1}{r}} \to 0 \text{ quand } r \to 0$$

Il s'ensuit que $u_m(O) = +\infty$; en outre, la propriété de v entraîne que les points de la circonférence γ_r où :

$$v \leqslant -\frac{\lambda_m(O)}{2} \log \frac{1}{r}$$

forment un ensemble de mesure angulaire tendant vers 0 avec r; par suite, u admet $+\infty$ comme quasi-limite en O.

D. — Les deux cas fondamentaux.

8. — On soulignera l'essentiel des études précédentes en distinguant les deux cas fondamentaux suivants :

Ou bien Φ_0 *est fini, c'est-à-dire qu'il existe des majorantes harmoniques.* Alors u est égale à la somme d'une fonction

harmonique hors de O et d'une fonction sousharmonique *même en* O; on peut même faire en sorte que celle-ci ait un flux nul en O;

Ou bien $\Phi_0 = +\infty$, *c'est-à-dire qu'il n'existe pas de majorantes harmoniques*, cas qui resterait à approfondir.

E. — Cas de u bornée inférieurement ou plus généralement de : $u \geqslant K \log \frac{1}{OM} + K'$.

9. — L'intérêt de ce cas vient de ce que, s'il y a des *majorantes harmoniques*, elles admettent la limitation inférieure donnée pour u, donc *sont de la forme* $K_1 \log \frac{1}{OM}$ + f. harm. en O. Donc, *pour qu'il existe des majorantes harmoniques* dans notre hypothèse, *il faut et suffit que* $|\lambda|$ *soit borné.*

De plus :

ou bien $\Phi_0 = +\infty$ (pas de majorantes harmoniques) et on peut se ramener au cas $u \geqslant 0$;

ou bien Φ_0 est fini et u est de la forme :

$$u = \frac{1}{2\pi} \Phi_0 \log \frac{1}{OM} + \text{fct. } w \text{ sousharmonique même en O,}$$

w étant de flux nul en O (1)

Pour que u soit bornée supérieurement, il faut et suffit donc que $\Phi_0 = 0$.

Lorsque u est bornée inférieurement, énonçons les critères suivants nécessaires et suffisants :

Critère d'existence d'une majorante harmonique :

λ bornée (supérieurement);

Critère pour que λ soit bornée (supérieurement) :

$\lambda_m(O)$ fini;

Critère pour que u soit bornée (supérieurement) :

$\lambda_m(O) = 0$, ou $\Phi_0 = 0$,

ou : $u_m(O)$ fini.

---

(1) Et d'ailleurs limitée inférieurement par :

$$\left(K - \frac{\Phi_0}{2\pi}\right) \log \frac{1}{OM} + K'$$

F. — **Cas où u admet hors de O un laplacien généralisé continu.**

10. — Dans ce cas u admet des dérivées premières continues, et l'on sait que les formules de Green s'appliquent avec un tel Δu d'ailleurs ici $\geqslant 0$.

Observons d'abord *de façon plus générale*, et comme cas particulier d'un théorème de F. Riesz (1), que si u admet sur un domaine borné Ω quelconque un $\Delta u \geqslant 0$ continu, pour *qu'il existe sur Ω une majorante harmonique, il faut et suffit que* $G(M,P)\Delta u(M)$ *soit sommable* sur Ω, G étant la fonction de Green généralisée (2) de Ω relative à un point P fixé quelconque sur Ω; et lorsqu'il en est ainsi :

$$u(M) + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega G(M,P)\,\Delta u(P)\,d\sigma_P$$

est *la plus petite majorante harmonique* de u sur Ω.

Il suffit pour le voir de prendre une suite de domaine de Dirichlet emboîtés Ω_n tendant vers Ω et de passer à la limite sur l'expression de la meilleure majorante harmonique dans Ω_n :

$$u(M) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega_n} G_n(M,P)\,\Delta u(P)\,d\sigma_P.$$

11. — Lorsqu'on considère *le voisinage du point* O, O *exclu*, on voit, d'après cela, que : *Pour qu'il existe une majorante harmonique, c'est-à-dire pour que Φ_0 soit fini, il faut et suffit que Δu soit sommable au voisinage de* O; *alors*, δ étant un voisinage et domaine contenant O, *u est sur* $(\delta - O)$ *de la forme :*

$$\text{(F)} \qquad u(M) = -\frac{1}{2\pi}\iint_\delta \log\frac{1}{MP}\,\Delta u(P)\,d\sigma_P + \text{fct. harm. hors de O},$$

ou même en introduisant la fonction de Green $G(M, P)$ commune à δ et à $(\delta - O)$:

$$\text{(F')} \qquad u(M) = -\frac{1}{2\pi}\iint_\delta G(M,P)\,\Delta u(P)\,d\sigma_P + h(P),$$

où h est la plus petite majorante harmonique de u sur $(\delta - O)$.

Remarquons que :

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_\delta \log\frac{1}{MP}\,\Delta u(P)\,d\sigma_P \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{2\pi}\iint_\delta G(M,P)\,\Delta u(P)\,d\sigma_P$$

considérées même en O (où elles peuvent être égales à $-\infty$)

(1) Voir *Acta math.*, 54, p. 357.
(2) Voir l'article du *Jahresbericht* ou de *Mathematica* (loc. cit.).

sont sousharmoniques même en O, comme on le voit en passant à la limite sur les mêmes intégrales étendues à la portion de δ extérieur à un cercle γ_r de rayon $r \to 0$.

Alors si u *est de module borné*, h sera comme u de flux nul en O et d'après (F') bornée inférieurement; donc h sera harmonique même en O et par suite :

$$\iint_\delta G(M,P)\,\Delta u(P)\,d\sigma_P \quad \text{et} \quad \iint_\delta \log\frac{1}{MP}\,\Delta u(P)\,d\sigma_P$$

seront finis et bornés au voisinage de O, *y compris* O, et :

$$u_m(O) = -\frac{1}{2\pi}\iint_\delta G(O,P)\,\Delta u(P)\,d\sigma_P + h(O).$$

12. — Le critère que Δu soit sommable au voisinage de O résulte d'ailleurs immédiatement, pour $r \to 0$, de la formule suivante relative à la couronne $\Gamma_{R,\,r}$:

$$\int_{\gamma_R}\frac{du}{dn_i}\,ds - \int_{\gamma_r}\frac{du}{dn_i}\,ds + \iint_{\Gamma_{R,\,r}}\Delta u\,d\sigma = 0,$$

Le passage à la limite donne de plus, pour Φ_0 fini, la formule :

$$\Phi_0 = \iint_{\gamma_R}\Delta u\,d\sigma + \int_{\gamma_R}\frac{du}{dn_i}\,ds,$$

qui s'étendrait à un contour plus général qu'une circonférence.

Ajoutons que *si pour la courbe :*

$$\mathcal{M}_r u = f\left(\log\frac{1}{r}\right)$$

l'asymptote est à distance finie (ce qui entraîne que Φ_0 soit fini), $(\Delta u).\log\dfrac{1}{OM}$ *est sommable au voisinage de* O [1], ce qui entraîne que $\log\dfrac{1}{r}\displaystyle\iint_{\gamma_r}\Delta u\,d\sigma \to 0$ avec r [2].

Cela résulte de la formule :

$$\iint_{\Gamma_{R,\,r}}\log\frac{1}{OM}\,\Delta u\,d\sigma + \int_{\gamma_R}\left(\log\frac{1}{OM}\,\frac{du}{dn_i} - u\,\frac{d\log\dfrac{1}{OM}}{dn_i}\right)ds$$
$$= \log\frac{1}{r}\int_{\gamma_r}\frac{du}{dn_i}\,ds - \frac{1}{r}\int_{\gamma_r}u\,ds$$
$$= \log\frac{1}{r}\,\Phi^{n_i}_{(\gamma_r)_i} - 2\pi\,\mathcal{M}_r u$$

et de l'interprétation géométrique du second membre.

(1) Et réciproquement.

(2) Cela résulte d'ailleurs de la dernière formule écrite et du n° 5 (§ I, p. 27).

En particulier si $u_m(O)$ est fini, $\Phi_0 = 0$, $\log \frac{1}{OM} \cdot \Delta u$ est sommable et $\iint_{\gamma_r} \Delta u d\sigma$ et $\int_{\gamma_r} \frac{du}{dn} ds$ tendent vers 0 plus vite que : $\dfrac{1}{\log \frac{1}{r}}$

13. Remarque. — J'ai étudié ailleurs et *directement* (1) la fonction sousharmonique particulière qu'est le potentiel :

$$V(M) = -\iint \log \frac{1}{PM} \psi(P) \, d\sigma_P \leqslant 0$$

où $\psi(P)$ est continue et $\geqslant 0$ au voisinage de O, O exclu, et aussi sommable; et j'ai obtenu des propriétés qui se déduiraient comme cas particuliers de l'étude générale du présent mémoire. Il y aurait d'ailleurs extension immédiate, et par les mêmes voies, directe ou appliquée, au cas où ψ, au lieu d'être continue hors de O, serait seulement bornée et mesurable sur tout domaine à distance non nulle de O, ce qui suffit avec les autres hypothèses pour que V soit sousharmonique même en O et continue hors de O.

Inversement cette étude directe de V(M) permettrait, grâce à (F) et (F') (voir p. 39), de retrouver, dans le cas particulier d'existence d'un Δu continu hors de O et indépendamment du lemme fondamental de convexité, l'essentiel des résultats de notre étude générale. D'ailleurs bien des propriétés pourraient aussi s'établir sans mettre en évidence l'interprétation de la convexité, en utilisant seulement certaines formules de Green (2), et, complétées par des passages à la limite ou approximations convenables, les démonstrations s'étendraient même au cas général.

---

(1) Voir thèse, *loc. cit.*, chap. II, § III nos 9-10. On y raisonne sur les expressions des moyennes et flux obtenus par opérations sous le signe $\iint$.

(2) Par exemple, on tire divers résultats de la seule considération de la formule suivante sur la meilleure majorante harmonique h dans la couronne $\Gamma_{R,r}$:

$$\int_{\gamma_r} h \frac{d \log \frac{1}{OM}}{dn_i} ds - \int_{\gamma_R} \log \frac{1}{OM} \frac{dh}{dn_i} ds = \log \frac{1}{r} \int_{\gamma_r} \frac{dh}{dn_i} ds - \frac{1}{r} \int_{\gamma_r} h ds.$$

14. Extensions au cas du voisinage d'un ensemble fermé E de capacité nulle. — Prenons seulement le cas de u (possédant un $\Delta u \geqslant 0$ continu) définie et bornée en module sur la portion Ω' d'un domaine Ω, extérieure à E. Alors G(M, P) étant la fonction de Green de Ω ou Ω'

$$u(\mathrm{M}) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega'} \mathrm{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,\Delta u(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}} = h(\mathrm{M})$$

où h est la plus petite majorante harmonique sur Ω' et est d'ailleurs harmonique même sur Ω. De plus, en tout point Q de E sur Ω :

$$u_m(\mathrm{Q}) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega'} \mathrm{G}(\mathrm{Q},\mathrm{P})\,\Delta u(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}} = h(\mathrm{Q}).$$

§ IV. — *Exemples de discontinuités en O d'une fonction sousharmonique continue hors de O.*

1. — Alors qu'une fonction convexe admet une valeur limite à l'extrémité d'un intervalle d'existence et est continue en tout point de cet intervalle, une fonction sousharmonique u peut être discontinue sur un ensemble partout dense et simultanément bornée (1); mais, comme nous allons voir, même si on suppose u continue, douée de dérivées continues jusqu'à un ordre arbitraire (*donc en particulier possédant un laplacien continu*), au voisinage d'un point O, *ce point exclu, elle peut présenter en* O *une allure très irrégulière*, et cela, même si elle est sousharmonique en O, ou, qui plus est, bornée en module; des exemples de ce fait montreront l'intérêt des propriétés générales de moyenne, de quasi-limite et de quasi-continuité.

2. — Rappelons d'abord que l'on sait former aussitôt, par l'intermédiaire de fonctions convexes de $\log \frac{1}{r}$, des fonctions sousharmoniques continues hors de O où elles admettent la limite déterminée $-\infty$ ou $+\infty$; et dans ce dernier cas on peut faire en sorte que $u(\mathrm{M})$ croisse arbitrairement vite quand $\mathrm{OM} \to 0$.

---

(1) Voir F. Riesz, *Acta math.*, 48, p. 336.

D'autre part, F. Riesz a donné (1) un *exemple* très simple de fonction sousharmonique bornée *discontinue* en un de ses points et continue au voisinage; il l'obtient à partir du potentiel U d'une masse finie < 0 distribuée en des points $M_n \to 0$ de sorte que U(0) soit fini; l'enveloppe supérieure de U et d'une constante $K < U(0)$ répond à la question et la discontinuité en 0 est d'ailleurs *essentielle* (2).

Nous donnerons de ce fait un autre exemple par un procédé analogue mais qui, plus souple, fournira aussi d'autres types de dicontinuités; on considérera un potentiel de masses négatives distribuées convenablement, non plus en des points, mais en couche sur des aires au voisinage de O, et c'est ce potentiel qui fournira *directement* les exemples; et, par suite, en disposant convenablement de la densité, on pourra même faire en sorte que la fonction sousharmonique obtenue admette hors de O des dérivées continues jusqu'à un ordre arbitrairement choisi, ce qui sera essentiel pour certaines applications.

Pour exposer ce procédé qu'on prendra sous une forme aussi simple que possible, on négligera d'abord cette question des dérivées; mais il suffira à la fin d'une retouche légère pour que les mêmes exemples comportent les dérivées voulues.

3. — On considérera *au voisinage de* O une suite de cercles γ_n, extérieurs l'un à l'autre et tendant vers le point O qui leur est extérieur (centre $q_n \to 0$ et rayon $\rho_n \to 0$) et sur γ_n une couche de densité constante $K_n > 0$. On va étudier le potentiel total :

$$I(M) = \sum_n K_n \iint_{\gamma_n} \log \frac{1}{MP}\, d\omega_P$$

$$\text{ou} \quad I(M) = \iint \psi(P) \log \frac{1}{MP}\, d\omega_P \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \psi(P) = K_n \text{ dans } \gamma_n \\ \psi(P) = 0 \text{ hors des } \gamma_n \end{cases}$$

et *c'est* — I *qui fournira les exemples en vue, pour un choix convenable des données.*

---

(1) *Acta math.*, 48, p. 336.
(2) C'est-à-dire qu'il n'y a pas de limite déterminée quand $M \neq 0$ tend vers O (Voir § II, n° 4).

Observons que le terme général de Σ_n est égal à

$$\pi\rho_n{}^2\mathrm{K}_n \log \frac{1}{\mathrm{M}q_n}$$

si M est extérieur à γ_n; il est d'ailleurs toujours au plus égal à cette valeur et il atteint son maximum

$$\pi\rho_n{}^2\left(\frac{1}{2} + \log\frac{1}{\rho_n}\right)$$

quand M est en q_n.

Pour que Σ_n converge en un point M quelconque $\neq$ O, il faut et suffit que $\Sigma_n \pi\rho_n{}^2\mathrm{K}_n$ converge, c'est-à-dire que la masse totale soit finie. On fera donc par la suite cette hypothèse.

Alors — I ($<$ 0) est sousharmonique même en O [1] et d'ailleurs continue hors de O.

4. Exemple d'une fonction bornée, sousharmonique même en O, continue au voisinage et essentiellement discontinue en O. — Supposons I(M) bornée; si elle est continue en O, la série Σ_n à termes positifs et continus doit, puisque continue, être uniformément convergente au voisinage de O [2]; son terme général doit donc tendre uniformément vers zéro et en particulier :

$$\mathrm{K}_n \iint_{\gamma_n} \log \frac{1}{q_n\mathrm{P}}\, d\omega_\mathrm{P} \to 0.$$

L'hypothèse contraire entraîne donc que I (bornée) ne soit pas continue en O, et il y aura alors discontinuité essentielle (voir p. 28), comme dans l'exemple de F. Riesz. Il en sera ainsi en particulier [2] si :

$$\mathrm{K}_n \iint_{\gamma_n} \log \frac{1}{q_n\mathrm{P}}\, d\omega_\mathrm{P} = \pi\rho_n{}^2\left(\frac{1}{2} + \log\frac{1}{\rho_n}\right)\mathrm{K}_n = \varepsilon > 0.$$

---

(1) C'est la limite d'une suite décroissante de fonctions sousharmoniques, ou bien voir p. 41.

(2) Cela résulte du théorème facile de Dini, que si une suite de fonctions continues $\geqslant 0$ sur un ensemble fermé est décroissante et tend en chaque point vers zéro, elle tend *uniformément* vers zéro.

(3) C'est ce qu'on peut voir autrement en remarquant que cela empêche que : $\iint_{\gamma_r} \psi(\mathrm{P}) \log \frac{1}{\mathrm{MP}}\, d\omega_\mathrm{P}$ tende, pour $r \to 0$, uniformément vers 0 relativement au point M dans γ_r (condition nécessaire et suffisante pour que $\iint \psi \log \frac{1}{\mathrm{MP}}\, d\omega_\mathrm{P}$ admette une limite finie déterminée quand M $\to$ 0, voir thèse *loc. cit.*).

Supposons cette condition vérifiée et cherchons à faire en sorte que I soit bornée; pour cela cherchons à majorer Σ_n et ses termes. Le terme général est quel que soit M au plus égal à ε mais aussi à $\pi\rho_n{}^2\mathrm{K}_n \log \dfrac{1}{q_n\mathrm{M}}$.

Prenons pour simplifier tous les q_n alignés, d'un même côté de O, avec $\mathrm{O}q_{n+1} < \mathrm{O}q_n$, et $q_nq_{n+1} \leqslant q_{n-1}q_n$. Menons en O la perpendiculaire Δ au support des q_n et supposons d'abord que M soit, par rapport à Δ, du côté des q_n et non sur Δ. Alors M étant fixé, il y a un q_n au moins, soit q_p, tel que :

$$\mathrm{M}q_p \leqslant \mathrm{M}q_i \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Pour $n \neq p$:

$$\mathrm{M}q_n \geqslant \frac{1}{2}\, q_nq_{n+1}$$

d'où :

$$\mathrm{K}_n \iint_{\gamma_n} \log \frac{1}{\mathrm{MP}}\, d\omega_{\mathrm{P}} \leqslant \pi\rho_n{}^2\,\mathrm{K}_n \log \frac{2}{q_nq_{n+1}}.$$

Pour $n = p$:

$$\mathrm{K}_n \iint_{\gamma_n} \log \frac{1}{\mathrm{MP}}\, d\omega_{\mathrm{P}} \leqslant \varepsilon$$

d'où, pour la série Σ_n la limitation supérieure :

$$\varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi\rho_n{}^2\,\mathrm{K}_n \log \frac{2}{q_nq_{n+1}}.$$

Si maintenant M est de l'autre côté de Δ ou sur Δ, cette limitation est encore valable. Elle est donc valable *quel que soit* $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$.

Il reste donc à voir que l'on peut disposer des données de sorte que :

$$\sum \pi\rho_n{}^2\,\mathrm{K}_n \text{ converge;}$$

$$\sum \pi\rho_n{}^2\,\mathrm{K}_n \log \frac{2}{q_nq_{n+1}} \text{ converge;}$$

$$\pi\rho_n{}^2\left(\frac{1}{2} + \log\frac{1}{\rho_n}\right)\mathrm{K}_n = \varepsilon,$$

ce qui revient aussitôt à disposer de q_n et ρ_n, de sorte que les cercles γ_n soient extérieurs l'un à l'autre et tendent vers O et que la série de terme général :

$$\frac{\log \dfrac{2}{q_n q_{n+1}}}{\dfrac{1}{2} + \log \dfrac{1}{\rho_n}}$$

soit convergente.

Pour toute suite $q_n \rightarrow 0$ satisfaisant aux hypothèses faites, plus haut, on pourra toujours choisir ρ_n de façon à satisfaire à ces conditions (1).

5. Exemple où u est sousharmonique même en O, avec :

$$u(\mathrm{O}) = u_m(\mathrm{O}) \text{ fini et } \underline{u(\mathrm{O})} = -\infty.$$

Il suffit de voir que l'on peut disposer des données pour que

$$\sum \pi\rho_n{}^2 \mathrm{K}_n \quad \text{et} \quad \sum \pi\rho_n{}^2 \mathrm{K}_n \log \frac{1}{\mathrm{O}q_n}$$

convergent, tandis que

$$\pi\rho_n{}^2 \left(\frac{1}{2} + \log \frac{1}{\rho_n}\right) \mathrm{K}_n = \theta_n \rightarrow +\infty,$$

car alors I sera partout fini mais tendra vers $+\infty$ sur la suite q_n. On voit aisément que c'est réalisable, quelle que soit θ_n et quelle que soit la suite $q_n \rightarrow 0$, formée de points tous différents et distincts de O, par un choix convenable de ρ_n.

D'après cela, *on peut même faire en sorte que sur certaines suites de points* M_n tendant vers O, *u tende vers $-\infty$ aussi vite qu'on veut*, c'est-à-dire y soit au plus égale à une fonction finie arbitraire $\theta(r) \rightarrow -\infty$ quand $r = \mathrm{OM} \rightarrow 0$; et l'on peut choisir pour suite M_n toute suite $\mathrm{M}_n \neq \mathrm{O}$ et tendant vers O.

On obtient ainsi *des exemples où* $\lambda(\mathrm{M})$ *admet en* O *une discontinuité essentielle;* on peut même faire en sorte que λ soit en même temps *de module borné*, comme on le démontrera facilement sur l'exemple qui précède en prenant $\theta_n = \log \dfrac{1}{\mathrm{O}q_n}$ et une suite q_n convenable.

---

(1) Dans le cas de l'espace, il n'y aurait aucune différence essentielle; ce serait même un peu plus simple.

6. Mêmes cas de discontinuités avec des dérivées n^e continues hors de O. — Dans les exemples précédents, il est aisé de modifier dans chaque γ_n la densité ψ au voisinage du contour de façon à la raccorder à zéro et de telle sorte qu'elle ait partout ailleurs qu'en O des dérivées continues jusqu'à un ordre quelconque, ce qui entraîne que le potentiel ait hors de O des dérivées continues jusqu'au même ordre. On peut d'ailleurs faire ces raccords de façon que le potentiel total soit en chaque point altéré de moins de ε donné arbitrairement > 0. Il s'ensuit que les divers cas de discontinuités qui précèdent sont réalisables aussi avec des fonctions sousharmoniques possédant hors de O des dérivées continues jusqu'à un ordre quelconque.

7. Remarque. — Par combinaison linéaire des cas précédents et de ceux formés avec des fonctions convexes de $\log \frac{1}{r}$, on obtiendra des exemples nouveaux d'allure irrégulière : en particulier on pourra faire en sorte que u sousharmonique continue (et même possédant des dérivées n^e continues) hors de O tende vers $+\infty$ aussi vite qu'on veut sur certaines suites $M_n \rightarrow O$ et vers $-\infty$ aussi vite qu'on veut sur d'autres suites.

On pourra enfin appliquer aux fonctions précédentes le procédé de l'enveloppe supérieure avec une constante.

CHAPITRE III

QUELQUES APPLICATIONS

§ I. — *Application aux fonctions harmoniques et au problème de Dirichlet.*

Rappelons d'abord quelques résultats sur le problème de Dirichlet.

1. — *La solution généralisée de Wiener* (1) *et la méthode du balayage.*

Considérons un domaine borné Ω et une distribution *continue* $\varphi(P)$ sur la frontière Σ; on peut la prolonger en une fonction $\Phi(P)$ continue sur $(\Omega + \Sigma)$. Soit Ω_n une suite de domaines de Dirichlet (2) contenus dans Ω et tendant vers Ω. La solution W_n du problème classique de Dirichlet pour Ω_n et la distribution-frontière égale à Φ (empreinte de Φ sur la frontière de Ω_n) a une limite W indépendante de la suite Ω_n et du choix de Φ correspondant à φ. C'est la solution généralisée au sens de Wiener du problème de Dirichlet pour Ω et $\varphi(P)$.

Un point-frontière O est dit régulier si W(M) tend vers $\varphi(O)$ quand M (sur Ω) tend vers O et cela quelle que soit $\varphi(P)$. Sinon il est dit irrégulier et il possède alors nécessairement la propriété suivante : c'est que sur une circonférence γ_r de centre O et rayon r, la partie non intérieure à Ω a une mesure angulaire tendant vers 0 avec r.

2. — Considérons maintenant dans le plan une distribution de masses négatives telle que le potentiel P_1 (intégrale de

(1) Voir l'article du *Jahresbericht* ou de *Mathematica* (*loc. cit.*). L'extension à l'espace est immédiate.
(2) Voir p. 13, note 1.

Stieljes), soit partout continu. Balayons sur la frontière les masses intérieures à Ω selon la méthode de Poincaré-De La Vallée Poussin (1). On obtient ainsi une nouvelle répartition de masses dont le potentiel P_2 sera : à l'extérieur de $(\Omega + \Sigma)$, le même qu'avant; à l'intérieur de Ω, harmonique et identique à la solution du problème de Dirichlet généralisé pour Ω et la distribution-frontière P_1 (potentiel primitif). Or (F. Riesz) le potentiel final P_2 est comme P_1 partout sousharmonique.

3. — *D'où le théorème suivant :*

Considérons une fonction $\Phi(P)$ sousharmonique et continue dans un domaine R où Ω est complètement intérieur; soit $\varphi(P)$ son empreinte sur la frontière Σ de Ω. La solution généralisée W du problème de Dirichlet pour Ω et $\varphi(P)$ peut être *prolongée sousharmoniquement* dans R, et de façon d'ailleurs à coïncider avec Φ sur l'extérieur de $\Omega + \Sigma$.

4. — *Application.* — Le prolongement sousharmonique de W permet alors, d'après la théorie générale du chapitre II, d'étudier l'allure de W à la frontière.

On voit ainsi qu'en un point irrégulier O, W considéré seulement sur Ω, admet une valeur moyenne et une quasi-limite en des sens bien faciles à préciser (2) vu la forme de Ω au voisinage de O.

Cela s'étend à une distribution-frontière égale à l'empreinte de la différence de deux fonctions sousharmoniques. Comme une distribution quelconque peut être approchée arbitrairement par un polynome et qu'un polynome est toujours sur un domaine fini la différence de deux polynomes sousharmoniques, on en déduira facilement que, *pour une distribution-frontière continue quelconque, la solution généralisée du problème de Dirichlet admet en tout point irrégulier une valeur moyenne.*

J'ai d'ailleurs établi ce résultat par voie directe (3) en généralisant une proposition de G. Bouligand et montré qu'il y a aussi

(1) Voir De La Vallée Poussin, *Annales de l'Inst. H. Poincaré*, 1931, p. 225.
(2) Voir les énoncés exacts, *C. R. Ac. Sc.*, mars 1933, pp. 737-739.
(3) Voir *C. R. Ac. Sc.*, mars 1933 (*loc. cit.*).

quasi-limite dans le cas général; de plus si la distribution atteint en O son minimum, cette quasi-limite (et valeur moyenne en O) est égale à la plus grande limite en O de la solution (1).

§ II. — *Application à l'équation :* $\Delta u = \varphi(M)$.

1. — On se donne $\varphi(M)$ continue au voisinage d'un point O, ce point exclu, et on prend Δ au sens généralisé (2). On se propose d'étudier au voisinage de O les intégrales de l'équation, c'est-à-dire les fonctions continues u admettant un laplacien généralisé continu égal à φ donné.

2. Existence des intégrales. — S'il y en a, l'intégrale la plus générale est la somme d'une intégrale particulière et de la fonction h la plus générale harmonique au voisinage de O, O exclu.

Lorsque φ est sommable, l'intégrale générale existe et peut s'écrire :

$$u = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\delta} \log\frac{1}{MP}\,\varphi(P)\,d\omega_P + h.$$

Lorsque φ n'est pas sommable, on ne sait pas en général s'il existe des intégrales. On peut démontrer toutefois qu'il y en a dans le cas particulier où $OM \,.\, \varphi(M)$ est sommable (3).

(1) Dans tout ce § I, on pourrait au lieu de domaines bornés, considérer plus généralement des ensembles ouverts bornés, comme on le fait ordinairement maintenant pour le problème de Dirichlet.

(2) Voir thèse, *loc. cit.*, chap. I, § I.

(3) Soit η_r la partie de δ extérieure au cercle γ_r. On démontre d'abord que

$$2\pi\, W_r(M) = \log\frac{1}{OM}\iint_{\eta_r}\varphi(P)\,d\omega_P - \iint_{\eta_r}\log\frac{1}{MP}\,\varphi(P)\,d\omega_P$$

est borné en module quel que soit $r \to 0$ et M tel que $OM \geqslant \epsilon > 0$ (ϵ choisi arbitrairement). Donc sur tout domaine δ à distance non nulle de O, W_r diffère d'une intégrale (de l'équation) choisie fixe et bornée sur δ par une fonction harmonique qui reste bornée quand $r \to 0$.

Soit alors $r_n \to 0$ et $\rho_n \to 0$. On peut extraire des r_n une suite $r_n^{(1)}$ telle que $W_{r_n^{(1)}}$ converge sur η_{ρ_1} vers une intégrale; puis de $r_n^{(1)}$, une suite $r_n^{(2)}$ telle que $W_{r_n^{(2)}}$ converge sur η_{ρ_2} vers une intégrale, etc. Le procédé diagonal appliqué à $r_n^{(1)}, r_n^{(2)}, \ldots$, fournit une suite r'_n telle que $W_{r'_n}$ converge hors de O vers une intégrale dont l'existence est ainsi établie.

3. Propriétés des intégrales. — *a*) $\varphi \geqslant 0$; alors toute intégrale est sousharmonique hors de O, d'où une série de propriétés. En particulier si φ est sommable, l'intégrale générale s'écrit :

$$u = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\delta} \mathrm{G}\,(\mathrm{M},\mathrm{P})\,\varphi\,(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}} + h,$$

où h est la plus petite majorante harmonique de u sur $(\delta - \mathrm{O})$ et il suffirait alors de faire une étude directe du terme $\iint_{\delta}$.

Signalons, en renvoyant aux exemples du chapitre précédent (§ IV), la possibilité d'irrégularités pour l'allure des intégrales en O, même si φ admet hors de O des dérivées continues jusqu'à un ordre quelconque donné.

b) φ de signe quelconque.

Lorsque φ est sommable, il suffit de poser :

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + |\varphi|}{2} \geqslant 0$$

$$u_1 = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\delta} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\,\varphi_1\,(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}} \leqslant 0$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + |\varphi|}{2} \geqslant 0$$

$$u_2 = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\delta} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\,\varphi_2\,(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}} \leqslant 0$$

u_1, u_2 sousharmoniques même en O,

pour avoir comme expression de l'intégrale générale :

$$u = u_1 - u_2 + \text{fct. harm. en O},$$

dont on tirera facilement, par application du chapitre II, bien des propriétés [1] que fournirait d'ailleurs une étude directe de :

$$\iint_{\delta} \log\frac{1}{\mathrm{MP}}\,\varphi\,(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}.$$

4. — Enfin, signalons la possibilité de certaines extensions au cas du voisinage d'un ensemble de capacité nulle.

---

(1) Ainsi, en généralisant à u les notions données dans le cas de sousharmonicité, il y aura toujours un flux fini Φ_{O} et, pour λ, une valeur moyenne en O égale à $\frac{\Phi_{\mathrm{O}}}{2\pi}$. Si $\log\frac{1}{\mathrm{OP}}\cdot\varphi(\mathrm{P})$ est sommable, u admet toujours une valeur moyenne en O, etc.

§ III. — *Application à l'équation* : $\Delta u = c(\mathrm{M})u$; $c \geqslant 0$.

1. — On se donne $c(\mathrm{M}) \geqslant 0$ et continue au voisinage d'un point O, ce point exclu, et, Δ étant pris au sens généralisé, on se propose d'étudier les intégrales au voisinage de O.

J'ai développé cette étude de façon directe dans ma thèse; toutes les propriétés générales (c'est-à-dire indépendantes de c) de l'allure et de la forme des intégrales que j'y donne sont des applications immédiates de la théorie générale qui précède, parce qu'on se ramène au cas $u \geqslant 0$ et qu'alors u est sousharmonique hors de O.

Il y a quelque intérêt à tracer rapidement le développement de l'étude proposée en se basant sur les résultats généraux du chapitre précédent et sur les théorèmes d'existence et unicité spéciaux à l'équation considérée et qui sont établis dans ma thèse.

2. Etude des intégrales bornées. — Soit sur le voisinage de O, ω un domaine de Dirichlet contenant O. Pour une distribution continue donnée à la frontière σ de ω, on démontre qu'il existe sur $(\omega - \mathrm{O})$ une intégrale bornée et une seule prenant les valeurs données sur σ.

Il en résulte que toute intégrale *bornée* est la différence de deux intégrales *bornées* $\geqslant 0$, qui sont des fonctions sousharmoniques, d'où des propriétés de moyenne $[u_m(\mathrm{O})]$, de quasi-continuité, de flux Φ_0 nul en O, etc.

En particulier, les fonctions :

$$\Delta u = cu, \qquad \log \frac{1}{\mathrm{OM}} \Delta u = \log \frac{1}{\mathrm{OM}} cu.$$

sont sommables, et même $\iint_\omega \log \frac{1}{\mathrm{PM}} c(\mathrm{P})u(\mathrm{P})d\sigma_\mathrm{P}$ est borné; il s'ensuit aisément que le problème proposé (du type de Dirichlet pour la distribution sur σ) équivaut à la résolution de l'équation de Fredholm à noyau singulier :

$$u(\mathrm{M}) + \frac{1}{2\pi}\iint_\omega \mathrm{G}(\mathrm{M,P})\, c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_\mathrm{P} =$$

$$= \text{solution } h(\mathrm{M}) \text{ harmonique sur } \omega$$

qui devient d'ailleurs au point O :

$$u_m(\mathrm{O}) + \frac{1}{2\pi}\iint_\omega \mathrm{G}(\mathrm{O,P})\, c(\mathrm{P})\, u(\mathrm{P})\, d\sigma_\mathrm{P} = h(\mathrm{O}).$$

Cette même équation intégrale montre comment des hypothèses particulières sur c entraînant des propriétés de $\iint_{\omega}$ en O (par exemple la continuité) fournissent des propriétés correspondantes de l'allure des u; j'ai indiqué d'autres propositions de ce type par comparaison avec des équations différentielles de même forme que l'équation donnée, mais où c et u sont seulement fonctions de r.

3. Intégrales bornées dans un sens, par exemple, inférieurement. — En ajoutant une intégrale bornée convenable, j'ai montré qu'on se ramenait au cas $u \geqslant 0$. Alors u est hors de O, sousharmonique et $\geqslant 0$ d'où une série de propriétés et les trois cas :

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_0 \text{ fini} > 0 \quad \text{et} \quad \Phi_0 = +\infty.$$

Il existe toujours des intégrales > 0 non bornées, mais il n'y a pas toujours d'intégrales admettant un flux Φ_0 fini > 0; cela dépend de l'allure de c; par exemple, il n'y en a pas si $c \geqslant \dfrac{1}{\overline{OM}^2}$, car $\Delta u = c.u$ doit être sommable (puisque Φ_0 est fini), ce qui est incompatible avec la forme :

$$cu \geqslant \frac{1}{\overline{OM}^2}\, \lambda \log \frac{1}{OM}$$

où λ admet une valeur moyenne $\lambda_m(O) > 0$. S'il n'y en a pas, on peut montrer que toutes les intégrales bornées en module s'annulent régulièrement en O et réciproquement. S'il y en a, il y a unicité quand on se donne Φ_0 et les valeurs sur σ entourant O. D'ailleurs, le problème de la détermination d'une intégrale bornée inférieurement, de flux donné $\Phi_0 \geqslant 0$ et prenant des valeurs données sur σ équivaut à la résolution de l'équation de Fredholm à noyau singulier :

$$u\,(M) + \frac{1}{2\pi}\iint_{\omega} G\,(M,P)\; c\,(P)\; u\,(P)\; dq_P =$$
$$= \text{solution harm. avec flux } \Phi_0.$$

J'ai montré aussi que la seule hypothèse que :

$$\lambda = \frac{u}{\log \dfrac{1}{OM}}$$

soit borné en module entraîne que u soit borné dans un sens.

4. — J'ai donné aussi diverses propriétés des intégrales considérées comme *fonctionnelles de c*. Je vais ici apporter quelques résultats nouveaux *sur les irrégularités possibles de l'allure des intégrales en* O.

Je posais dans ma thèse la question de savoir si pour les intégrales bornées il peut y avoir effectivement discontinuité en O. Voici, pour c et u convenablement choisis, un exemple qui répond par l'affirmative.

On a vu comment on peut former un potentiel :

$$V(M) = -\frac{1}{2\pi}\iint \psi(P) \log \frac{1}{MP}\, d\sigma_P$$

avec $\psi(P) \geqslant 0$, tel que $V(M)$ soit borné en module et essentiellement discontinu en O, et on peut faire en sorte que ψ et V admettent hors de O des dérivées continues jusqu'à un ordre donné. Il suffit d'ajouter une constante à V pour avoir une fonction sousharmonique $u > 0$ et bornée, telle que :

$$\Delta u = \psi(M) = \frac{\psi(M)}{u} \cdot u.$$

Le coefficient :

$$c = \frac{\psi(M)}{u(M)} \geqslant 0$$

et la fonction $u(M)$, admettant tous deux des dérivées continues jusqu'à un ordre arbitrairement choisi, fournissent l'exemple cherché.

Il peut aussi arriver effectivement que pour une intégrale $u > 0$, la fonction λ soit bornée et discontinue en O. Formons en effet un potentiel :

$$V(M) = -\frac{1}{2\pi}\iint \psi(P) \log \frac{1}{MP}\, d\sigma_P \quad (\psi \geqslant 0),$$

tel que :

$$\frac{V(M)}{\log \dfrac{1}{OM}}$$

soit borné et discontinu en O, ce qui peut être réalisé avec ψ et V admettant hors de O des dérivées continues jusqu'à un ordre quelconque. Alors, en prenant K assez grand :

$$u = K \log \frac{1}{OM} + V(M) > 0,$$

avec :

$$\Delta u = \psi = \frac{\psi}{u} \cdot u,$$

d'où l'exemple cherché avec u et $c = \frac{\psi}{u}$ admettant hors de 0 des dérivées continues jusqu'à un ordre quelconque donné.

5. — J'ai étudié aussi plus généralement les intégrales bornées de la même équation au voisinage d'un ensemble de singularités de capacité nulle (1).

On pourrait, comme dans le cas d'un point isolé, reprendre la question en utilisant les résultats concernant les fonctions sousharmoniques générales.

Comme conclusion, faisons remarquer simplement que les exemples précédents ne font qu'illustrer les applications qu'on pourrait faire de la théorie générale des fonctions sousharmoniques à des types très étendus d'équations aux dérivées partielles ou même intégro-différentielles, obtenues en égalant Δu à certaines fonctionnelles de u et de ses dérivées.

(1) Voir *Bull. Sc. math.*, sept. 1931.

18.076. — Bordeaux, Imprimeries Delmas, Chapon, Gounouilhou. — 1934.

Actualités Scientifiques et Industrielles

Séries 1929, 1930, 1931 :

(*Voir deuxième page de la couverture.*)

Série 1932 :

XXXI. L. de Broglie. — **Généralisation des relations d'incertitude** ...... 6 fr.
XXXII. Irène Curie et F. Joliot. — **L'existence du neutron** .... 6 fr.
XXXIII. Jean-Louis Destouches. — **Etat actuel de la théorie du neutron** .. 18 fr.
XXXIV. S. Rosenblum. — **Origine des rayons gamma; structure fine du spectre magnétique des rayons alpha** .... 12 fr.
XXXV. A. Magnan. — **Premiers essais de cinématographie ultra-rapide** .. 15 fr.
XXXVI. A. Sainte-Laguë. — **Probabilités et morphologie** .... 6 fr.
XXXVII. N. Marinesco. — **Influence des facteurs électriques sur la végétation** .... 7 fr.
XXXVIII. André George. — **Mécanique quantique et causalité** .... 6 fr.
XXXIX. L. Brillouin. — **Notions de mécanique ondulatoire; les méthodes d'approximation** .... 10 fr.
XL. E. Bauer. — **Critique des notions d'éther, d'espace et de temps, cinématique de la relativité** .... 7 fr.
XLI. F. Perrin. — **La dynamique relativiste et l'inertie de l'énergie** ...... 6 fr.
XLII. L. de Broglie. — **Conséquences de la relativité dans le développement de la mécanique ondulatoire** .... 6 fr.
XLIII. G. Darmois. — **La théorie Einsteinienne de la gravitation, les vérifications expérimentales** .... 7 fr.
XLIV. E. Cartan. — **Le parallélisme absolu et la théorie unitaire du champ** .... 6 fr.
XLV. P. Langevin. — **La relativité, conclusion générale** .... 6 fr.
XLVI. A. Magnan. — **Cinématographie jusqu'à 12.000 vues par seconde** .... 15 fr.
XLVII. Ch. Fraipont et Suzanne Leclerq. — **L'évolution. Adaptations et mutations. Berceaux et migrations** .... 9 fr.
XLVIII. Ch. Fraipont. — **Adaptations et mutations. Position du problème.** 6 fr.
XLIX. Hans Reichenbach. — **La philosophie scientifique; vues nouvelles sur ses buts et ses méthodes** .... 10 fr.
L. P. Swings. — **Les bandes moléculaires dans les spectres stellaires** .... 7 fr.
LI. H. Brasseur. — **Structure et propriétés optiques des carbonates** .... 7 fr.

Série 1933 :

(*Voir quatrième page de la couverture.*)

Actualités Scientifiques et Industrielles

Séries 1929, 1930, 1931 et 1932 :

(Voir deuxième page de la couverture.)

Série 1933 :

52. G. Urbain. — **La coordination des atomes dans la molécule et la symbolique chimique.** Première partie .... 12 fr.
53. G. Urbain. — **La coordination des atomes dans la molécule et la symbolique chimique.** Deuxième partie .... 12 fr.
54. M. Chatelet. — **Spectres d'absorption visibles et ultra-violets des solutions** .... 7 fr.
55. L. Leprince-Ringuet. — **Les transmutations artificielles : particules, alpha, neutrons, protons, rayons cosmiques** .... 15 fr.
56. E. Néculcéa. — **Sur la théorie du rayonnement** .... 7 fr.
57. G. Fournier et M. Guillot. — **Sur l'absorption exponentielle des rayons β du radium E** .... 10 fr.
58. Jean Perrin. — **La recherche scientifique** .... 6 fr.
59. L. Brillouin. — **La diffraction de la lumière par des ultra-sons** .... 10 fr.
60. A. Magnan et A. Sainte-Lague. — **Le vol au point fixe** .... 10 fr.
61. M. Prettre. — **L'inflammation et la combustion explosive en milieu gazeux.** 1[re] partie : **Hydrogène et oxyde de carbone** .... 15 fr.
62. Mme P. Curie. — **Les rayons α, β, γ, des corps radioactifs en relation avec la structure nucléaire** .... 12 fr.
63. H. Mineur. — **L'Univers en expansion** .... 12 fr.
64. T. Cahn. — **Les phénomènes biologiques dans le cadre des sciences exactes** .... 6 fr.
65. A. Magnan et A. Planiol. — **Sur l'excédent de puissance des oiseaux** .. 8 fr.
66. A. Magnan et A. Planiol. — Sur l'excédent de puissance des insectes .. 8 fr.
67. J. Trillat. — **Organisation et principes de l'enseignement en U. R. S. S.** .... 12 fr.
68. E. Meyerson. — **Réel et déterminisme dans la physique quantique** .. 10 fr.
69. P. Urbain. — **Les sciences géologiques et la notion d'état colloïdal.** 18 fr.
70. L. Goldstein. — **Les théorèmes de conservation dans la théorie des chocs électroniques** .... 9 fr.
71. L. Brillouin. — **La méthode du champ self-consistant** .... 12 fr.
72. E. Cartan. — **Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire** .... 12 fr.
73. P. Swings. — **Molécules diatomiques. Etude des termes spectraux** .... 12 fr.
74. P. Swings. — **Spectres moléculaires. Etude des molécules diatomiques** . 14 fr.
75. G. Champetier. — **La structure de la cellulose dans ses rapports avec la constitution des sucres** .... 8 fr.
76. Rudolf Carnap. — **L'ancienne et la nouvelle logique** .... 8 fr.
77. Lucien Godeaux. — **Questions non résolues de géométrie algébrique** .. 8 fr.
78. Vera Dantchakoff. — **Le devenir du sexe** .... 15 fr.

Série 1934 : *demander catalogue spécial.*

18.076. — Imprimeries Delmas, Chapon, Gounouilhou. — Bordeaux.